1. Mars jest czwartą planetą Układu Słonecznego, a jego okres orbitalny wynosi $T_M = 1{,}88$ roku. Opozycja to takie ułożenie Ziemi i innej planety (o promieniu orbity większym od promienia orbity Ziemi), że Słońce, Ziemia i ta planeta znajdują się na jednej prostej w podanej kolejności. Zakładamy, że zarówno Mars jak i Ziemia mają kołowe, współosiowe (leżące na jednej płaszczyźnie) orbity.

   - Prędkość kątowa ciała o prędkości v poruszającego się po kołowej orbicie o promieniu r jest równa:

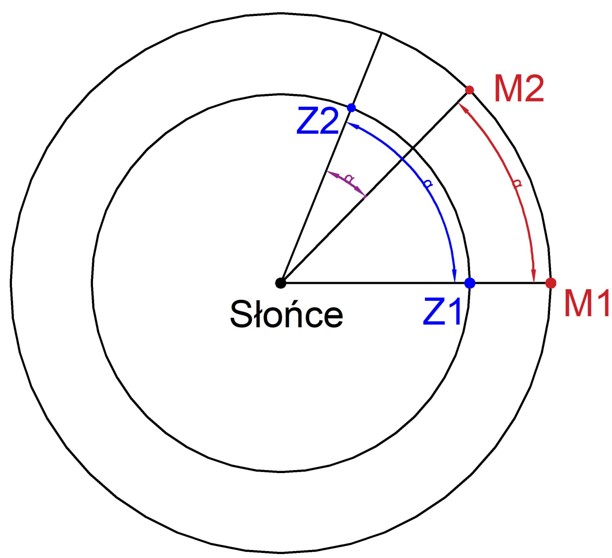
     $$\omega = \frac{v}{r} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$$

     Oblicz prędkości kątowe Ziemi i Marsa. Wyraź odpowiedzi w stopniach na dzień.

   - Zaobserwowano opozycję Marsa. Jaki kąt przebędzie Mars względem Słońca w czasie $\Delta t = 0{,}5$ roku? Jaki kąt przebędzie on w tym czasie względem Ziemi (rozważamy kąt Ziemia – Słońce – Mars)?
   - Co ile lat możemy obserwować opozycję Marsa?

autor: Olaf Krupiński

Rozwiązanie



Rysunek 1: Schemat ruchu planet opisanego w zadaniu

- Prędkość kątowa ω danego ciała jest miarą zmiany kąta w czasie, czyli $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$. Przy założeniu kołowości orbity, ω jest wielkością stałą. Zauważmy, że podczas całego okresu obiegu, zataczamy pełne koło, a więc kąt 360°, co pozwala zapisać prędkość kątową jako:

  $$\omega = \frac{360^\circ}{T}$$

  Taką samą zależność uzyskalibyśmy wstawiając do wzoru podanego we wskazówce $v = \frac{2\pi R}{T}$ – a więc prędkość w ruchu jednostajnym po okręgu. Uwaga – w literaturze bardzo często można spotkać wzór $\omega = \frac{2\pi}{T}$, jednakże przedstawia on wartość prędkości kątowej w radianach (inna jednostka kąta, $\pi = 180^\circ$) na sekundę. Jako, iż miara kątowa nie pojawia się w podstawie programowej, postaramy się trzymać jednostek ze stopniami.

Wstawiając wielkości $T_M = 1{,}88$ roku oraz $T_Z = 1$ rok do powyższego wzoru, otrzymamy:

$$\omega_M = 191{,}5^\circ/\text{rok} = 0{,}525^\circ/\text{dzień}$$

i dla prędkości kątowej Ziemi:

$$\omega_Z = 360^\circ/\text{rok} = 0{,}986^\circ/\text{dzień}$$

- Jak powiedzieliśmy w poprzednim podpunkcie, prędkość kątowa, zarówno Marsa, jak i Ziemi jest stała, a więc przekształcając wzór $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ otrzymamy wartość kąta przebytego w pół roku:

$$\alpha_M = \omega_M \cdot \Delta t = 191{,}5^\circ/\text{rok} \cdot 0{,}5 \text{ roku} = 95{,}75^\circ$$

Co jest odpowiedzią na pierwsze z zadanych w tym podpunkcie pytań. Obliczając analogicznie dla Ziemi dostajemy:

$$\alpha_Z = \omega_Z \cdot \Delta t = 360^\circ/\text{rok} \cdot 0,5 \text{ roku} = 180^\circ$$

Są to oczywiście kąty jakie obie planety przebyły względem Słońca. Szukany kąt Ziemia – Słońce – Mars będzie więc po prostu różnicą powyższych kątów:

$$\alpha_{MZ} = \alpha_Z - \alpha_M = 180^\circ - 97{,}75^\circ = 82{,}25^\circ$$

- Planety ponownie ustawią się w opozycji, gdy ich względny kąt (a więc ponownie kąt Ziemia – Słońce – Mars) wyniesie 360°. Mamy więc warunek:

$$\alpha_{MZ} = \alpha_Z - \alpha_M = 360^\circ$$

Oznaczmy szukany czas pomiędzy kolejnymi opozycjami jako $\tilde{t}$. Pamiętając o poprzednio policzonych prędkościach kątowych, możemy skorzystać ze wzoru $\alpha = \omega \cdot \Delta t$ i otrzymujemy:

$$\alpha_Z - \alpha_M = \omega_Z \cdot \tilde{t} - \omega_M \cdot \tilde{t} = \tilde{t} \cdot (\omega_Z - \omega_M)$$

Łącząc powyższe dwa wzory otrzymamy:

$$360^\circ = \tilde{t} \cdot (\omega_Z - \omega_M)$$

$$\Rightarrow \tilde{t} = \frac{360^\circ}{\omega_Z - \omega_M}$$

I po wstawieniu wyliczonych w pierwszym podpunkcie prędkości kątowych, dostaniemy wartość liczbową:

$$\tilde{t} = \frac{360^\circ}{360^\circ - 191{,}5^\circ} \text{ lat} = 2{,}14 \text{ lat}$$

Co ciekawe, wartość $\tilde{t}$ byłaby mniejsza dla planet bardziej odległych od Ziemi niż Mars (np. dla Jowisza czy Saturna). Pierwsze dwa podpunkty zadania miały na celu wizualizację sytuacji obecnej w zadaniu i stopniowe doprowadzenie czytelnika do rozwiązania. Jednakże możliwe jest oczywiście bezpośrednie wyrażenie $\tilde{t}$ poprzez okresy orbitalne Ziemi i Marsa. Otrzymamy wtedy groźnie wyglądający wzór:

$$\tilde{t} = \frac{1}{\frac{1}{T_Z} - \frac{1}{T_M}} = \frac{T_M T_Z}{T_M - T_Z}$$

Wartość $\tilde{t}$ nazywa się okresem synodycznym i jest przydatną wielkością występującą nie tylko w zjawiskach opozycji.

autor rozwiązania: Olaf Krupiński

2. Żagiel słoneczny jest niestandardowym, aczkolwiek czasem stosowanym, alternatywnym sposobem napędzania statków kosmicznych. Został po raz pierwszy skutecznie użyty przez wystrzeloną w 2010 roku misję Japońskiej Agencji Eksploracji Aerokosmicznej (JAXA) IKAROS. Jego działanie opiera się na skorzystaniu z faktu, że światło (fotony), podobnie jak cząstki posiadające masę, może wywierać ciśnienie. Pęd jednego fotonu p_γ jest równy:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$$

gdzie E_γ to energia tego fotonu, a c to prędkość światła. Pęd wiązki fotonów o mocy L w czasie t jest w takim razie równy

$$p = \frac{E}{c} = \frac{Lt}{c}$$

Z kolei ciśnienie jest, z definicji, równe:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{S\Delta t}$$

gdzie F to siła, S to powierzchnia, Δp to zmiana pędu (w tym przypadku pędu fotonów) w czasie Δt.

- Wiedząc, że stała słoneczna[1] jest równa $I = 1361\,\mathrm{W/m^2}$, oblicz ciśnienie, jakie wywierałoby światło pochodzące ze Słońca na doskonale czarny (czyli absorbujący wszystkie padające na niego fotony) żagiel słoneczny znajdujący się w odległości 1 au od Słońca i orbitujący wokół niego na orbicie w kształcie okręgu. Załóż, że światło pada na żagiel pod kątem prostym.
- Dodatkowo przyjmując, że żagiel ma kształt kwadratu o boku 100 metrów, oblicz siłę, jaką światło Słońca wywierałoby na taki statek kosmiczny.
- Rozstrzygnij, czy ta siła sprawiłaby konieczność zmiany prędkości statku kosmicznego w celu utrzymania kołowej orbity o promieniu 1 au, a jeśli tak, to jaka byłaby to zmiana – czy jego prędkość byłaby większa, czy mniejsza? Należy rozstrzygnąć jedynie znak zmiany prędkości, wartość liczbowa nie jest wymagana.

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

Jako że żagiel pochłania całe padające na niego światło, zmiana pędu fotonów przez niego pochłoniętych w czasie Δt równa jest ich całkowitemu pędowi i wynosi:

$$\Delta p = \frac{L\Delta t}{c},$$

zatem zgodnie z podanym w treści wzorem, ciśnienie wywierane na żagiel przez światło słoneczne wynosi:

$$P = \frac{\Delta p}{S\Delta t} = \frac{\frac{L\Delta t}{c}}{S\Delta t} = \frac{L}{cS} = \frac{I}{c} = \frac{1361\,\mathrm{W/m^2}}{3\times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 4{,}54\times 10^{-6}\,\mathrm{Pa},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że iloraz mocy światła słonecznego L przez powierzchnię S, na którą pada, jest równy stałej słonecznej I. Siła wywierana na żagiel równa jest ciśnieniu pomnożonemu przez powierzchnię żagla $S = a^2$, gdzie a to długość boku żagla i wynosi:

$$F = PS = \frac{IS}{c} = \frac{Ia^2}{c} = \frac{1361\,\mathrm{W/m^2}\times(100\,\mathrm{m})^2}{3\times 10^8\,\mathrm{m/s}} = 0{,}0454\,\mathrm{N}.$$

W ruchu na orbicie kołowej bez uwzględniania ciśnienia promieniowania siła przyciągania grawitacyjnego F_g równoważy siłę odśrodkową F_{od}:

$$F_g = F_{od}$$

[1] Stała słoneczna to ilość energii wyprodukowanej przez Słońce w czasie 1 sekundy jaka przechodzi przez jednostkową powierzchnię (np. $1\,\mathrm{m^2}$) ustawioną prostopadle do promieniowania w odległości Ziemia–Słońce. Wartość ta mierzona jest nad atmosferą Ziemi.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

z czego otrzymujemy wzór na prędkość orbitalną:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

gdzie jako m oznaczyliśmy masę ciała poruszającego się po orbicie, M to masa ciała centralnego (w tym przypadku Słońca), a r to promień orbity. Teraz uwzględnijmy siłę pochodzącą od fotonów uderzających w żagiel słoneczny. Jako że siła F_γ, z jaką światło słoneczne działa na statek kosmiczny, ma zwrot przeciwny do siły grawitacji, aby statek mógł utrzymać się na orbicie, musi zachodzić równość:

$$F_g - F_\gamma = F_{od}$$

$$\frac{GMm}{r^2} - \frac{IS}{c} = \frac{mv^2}{r},$$

więc w tym przypadku prędkość ciała wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r} - \frac{ISr}{mc}}.$$

Człon $\frac{ISr}{mc}$ jest dodatni, więc $\sqrt{\frac{GM}{r} - \frac{ISr}{mc}} < \sqrt{\frac{GM}{r}}$, zatem w celu utrzymania ciała na orbicie o takim samym promieniu jego prędkość musiałaby ulec zmniejszeniu.

Co interesujące, stworzenie żagla słonecznego z materiału doskonale czarnego nie jest najlepszym rozwiązaniem. Tworząc go z materiału odbijającego wszystkie fotony w kierunku, z którego w niego uderzyły (czyli efektywnie stworzenie żagla słonecznego, który byłby lustrem), sprawilibyśmy, że ciśnienie wywierane przez promieniowanie byłoby dwukrotnie większe. Dzieje się tak dlatego, że foton po odbiciu zacząłby lecieć w przeciwną stronę niż na początku, czyli zmieniłby swój pęd o $2p_\gamma$, a nie o p_γ.

autor rozwiązania: Piotr Jędrzejczyk

3. Rozważmy hipotetyczny scenariusz, w którym kosmici umieścili piłkę do koszykówki w odległości 100 000 km od środka Ziemi.

   - Piłka początkowo spoczywała względem Ziemi, po czym zaczęła swobodnie na nią spadać. Oblicz, jaką prędkość będzie miała piłka, gdy znajdzie się w odległości 10 000 km od centrum Ziemi. Uwzględnij wyłącznie siłę grawitacji Ziemi, pomiń opory ruchu.
   - Tym razem kosmici chcą sprawić, by piłka przeleciała w pobliżu Ziemi, a następnie na zawsze uciekła od Ziemi (a więc żeby piłka po największym zbliżeniu wiecznie zwiększała swoją odległość od Ziemi). Jaką prędkość muszą nadać piłce? Kiedy w trakcie lotu prędkość piłki będzie największa? Przedstaw uzasadnienie. Uwzględnij wyłącznie siłę grawitacji Ziemi, pomiń opory ruchu.

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

Oznaczmy $R = 100\,000\,\mathrm{km} = 1{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m}$ oraz $r = 10\,000\,\mathrm{km} = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{km}$. Niech także $M = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ – masa Ziemi oraz $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$. Masę piłki będziemy zaś oznaczać literą m.

Do rozwiązania podpunktu a) skorzystamy z zasady zachowania energii. Ponieważ uwzględniamy wyłącznie ruch w polu grawitacyjnym Ziemi, w dowolnym momencie energia całkowita piłka równa będzie sumie jej energii potencjalnej w polu grawitacyjnym oraz energii kinetycznej. W początkowym momencie prędkość piłki była równa 0, a więc jej energia kinetyczna także była równa 0. Możemy więc zapisać, że całkowita energia piłki w momencie opuszczenia piłki przez kosmitów wynosi $E_{pocz} = -\frac{GMm}{R}$. W momencie zaś, gdy piłka znajdzie się w odległości r od środka Ziemi, jej energia całkowita będzie równa sumie energii potencjalnej i energii kinetycznej: $E_{kon} = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv_p^2}{2}$ – gdzie v_p to szukana prędkość piłki w odległości 10 000 km. Z zasady zachowania energii wiemy, że $E_{kon} = E_{pocz}$. Stąd zapisujemy:

$$-\frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv_p^2}{2}$$

Dzieląc równania obustronnie przez m i dodając następnie $\frac{GM}{r}$, mamy: $\frac{GM}{r} - \frac{GM}{R} = \frac{v_p^2}{2}$. Stąd łatwo otrzymać wzór na prędkość piłki, którą należy obliczyć:

$$v_p = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} = 8460\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Aby rozwiązać podpunkt b), należy zauważyć, że piłka ucieknie od Ziemi, jeśli jej prędkość będzie większa lub równa drugiej prędkości kosmicznej (zwanej też czasem prędkością ucieczki). Wzór na drugą prędkość kosmiczną w odległości R:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 2820\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Jest to właśnie szukana minimalna prędkość, jaką muszą nadać kosmici piłce, aby uciekła od Ziemi, nie powracając więcej do niej. Do ustalenia momentu, gdy piłka będzie poruszała się najszybciej, ponownie skorzystamy z zasady zachowania energii. Zauważmy, że energia całkowita piłki na początku (tuż po nadaniu prędkości przez kosmitów) jest równa:

$$E_{pocz2} = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv_{II}^2}{2} = -\frac{GMm}{R} + \frac{2GMm}{2R} = 0$$

Zarazem energia całkowita piłki w momencie, gdy znajdzie się w dowolnej odległości d od Ziemi wynosić będzie $E_c = -\frac{GMm}{d} + \frac{mv^2}{2}$, gdzie v – prędkość piłki w odległości d od Ziemi. Znowu, z zasady zachowania energii $E_c = 0$, więc $\frac{GMm}{d} = \frac{mv^2}{2}$. Stąd obliczamy:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

Ze wzoru widzimy, że im mniejsza będzie wartość d tym większa będzie prędkość piłki. Stąd wnioskujemy, że maksymalną prędkość piłka osiągnie w momencie, gdy znajdzie się najbliżej Ziemi w czasie swojego ruchu. Trzeba tutaj pamiętać, że aby piłka mogła uciec na nieskończoną odległość od Ziemi w trakcie lotu nie może dojść do kolizji – stąd minimalna odległość d musi być większa od promienia Ziemi.

Uwaga: Jedną z intuicji prowadzących do wzoru na minimalną prędkość ucieczki jest fakt, że gdy pewien mały obiekt o masie m ma oddalić się na nieskończoną odległość od masywnego ciała (np. planety) M, w którego polu grawitacyjnym się znajduje to, w sytuacji granicznej, wraz z oddalaniem się od planety, jego prędkość będzie malała do 0. Oznaczmy przez P moment początkowy ruchu małego obiektu, a przez K moment, gdy obiekt ten znajduje się w znacznej odległości od planety. Z zasady zachowania energii: $E_c = -\frac{GMm}{r_P} + \frac{mv_P^2}{2} = -\frac{GMm}{r_K} + \frac{mv_K^2}{2}$. W takiej sytuacji, wraz ze zwiększaniem się odległości, zarówno czynnik $-\frac{GMm}{r_K}$, jak i $\frac{mv_K^2}{2}$ zbliżają się coraz bardziej do 0, zatem $E_c = 0$ w dowolnym momencie takiego ruchu (nie odnosi się to do wszystkich orbit, lecz tylko do takich torów ruchu, które spełniają warunek podany w pierwszym zdaniu uwagi; orbity takie nazywamy parabolicznymi). Przekształcając wtedy równość $-\frac{GMm}{r_P} + \frac{mv_P^2}{2} = 0$, otrzymujemy znany wzór na drugą prędkość kosmiczną: $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$.

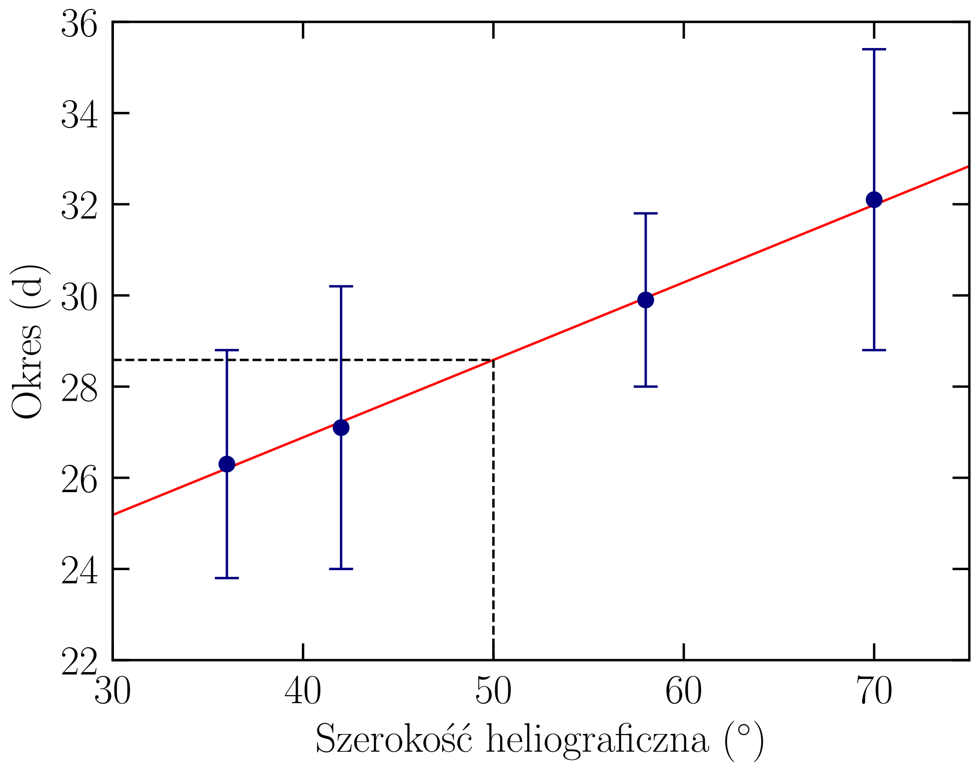
autor rozwiązania: Michał Jagodziński

4. Słońce, podobnie jak Ziemia, rotuje wokół własnej osi. Na podstawie tej rotacji definiujemy układ współrzędnych heliocentrycznych – długość i szerokość heliograficzną. Szerokość heliograficzna przyjmuje wartości od $-90°$ do $90°$ ($-90°$ na biegunie południowym, $0°$ na równiku, $90°$ na biegunie północnym). Słońce nie rotuje jednak jak bryła sztywna, prędkość rotacji na różnych szerokościach heliograficznych jest różna. Okazuje się jednak, że zależność okresu rotacji P od szerokości heliograficznej φ dla pewnych rejonów Słońca może być przybliżona prostą. Korzystając z danych przedstawionych w tabeli poniżej, wykonaj wykres tej zależności na papierze milimetrowym. Następnie oszacuj okres rotacji Słońca na szerokości heliograficznej $\varphi = 50°$.

φ	P
$36°$	$26{,}3 \pm 2{,}5$ d
$42°$	$27{,}1 \pm 3{,}1$ d
$58°$	$29{,}9 \pm 1{,}9$ d
$70°$	$32{,}1 \pm 3{,}3$ d

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie



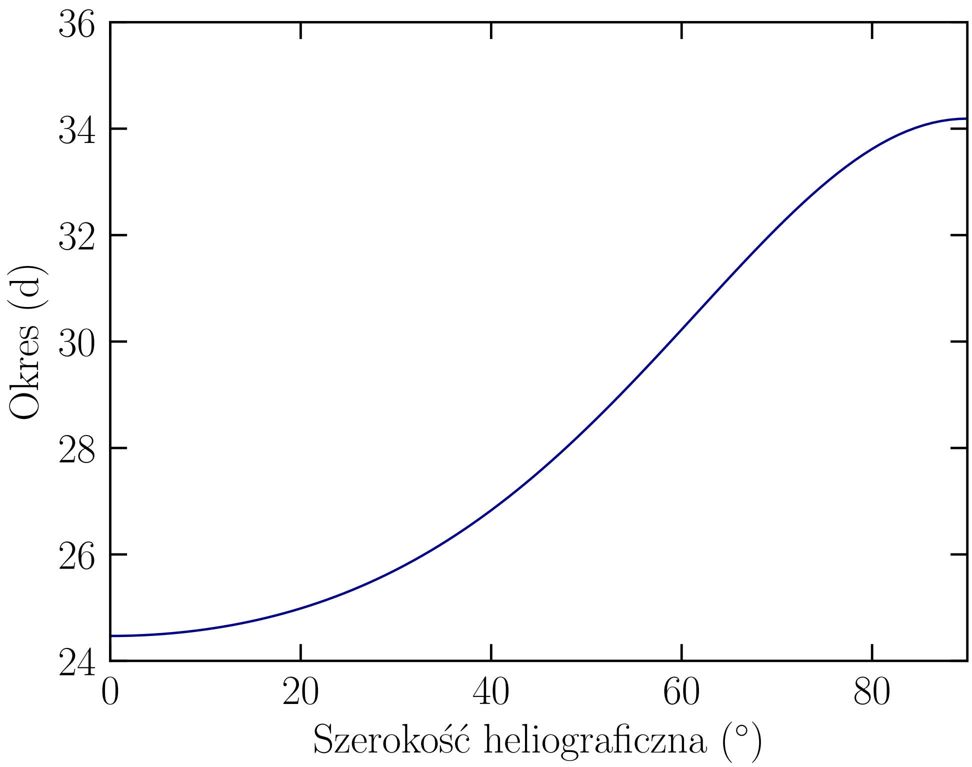
Poprawnie wykonany wykres przedstawiono powyżej. Przy jego tworzeniu kluczowe było zwrócenie uwagi na:

- Dobranie stosownego zakresu wartości na osiach i skali; stworzenie wykresu zaczynającego się od zera istotnie pogorszyłoby jego czytelność. Wybranie takiego zakresu osi jak na powyższym wykresie sprawia, że dane znajdują się na środku i możliwe jest odczytanie ich z większą precyzją.
- Poprawne zaznaczenie niepewności pomiarowych.

- Dopasowanie prostej do punktów pomiarowych – powinna ona przechodzić w pobliżu wszystkich punktów.
- Podpisanie obu osi.
- Właściwe dobranie rozmiaru wykresu – wykonany na papierze milimetrowym nie powinien zajmować mniej niż około 1/3 strony.

Teraz odczytujemy z wykresu okres rotacji Słońca na szerokości heliograficznej $\varphi = 50°$. Otrzymujemy $P \approx 28{,}6\,\mathrm{d}$. Oszacowanie niepewności tego okresu nie jest wymagane, dobrą praktyką jest jednak zapisanie tego wyniku z dokładnością do (w tym przypadku) maksymalnie trzech miejsc znaczących. Okres ten jest w końcu przez nas szacowany i nie mamy pewności co do dokładnej jego wartości.

Uwaga: Warto pamiętać, że przybliżenie zależności okresu rotacji od szerokość heliograficznej prostą nie jest ścisłe i w szczególności nie może być stosowane na powierzchni całego Słońca. Zależność ta może być lepiej przybliżana przy użyciu bardziej skomplikowanych funkcji. Bardziej rzeczywisty wykres zależności okresu rotacji od szerokości heliograficznej przedstawiono poniżej.



autor rozwiązania: Krzysztof Król