Rozwiązania zadań II etapu

1. Umieszczona na północnym biegunie geograficznym Ziemi armata wystrzeliwuje pocisk pionowo w górę z prędkością $v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}$, gdzie $M_\oplus, R_\oplus$ to odpowiednio masa i średni promień Ziemi. Czy pocisk powróci na powierzchnię Ziemi? Jeśli tak, to:

   - Na jaką maksymalną wysokość doleci, zanim zacznie spadać?
   - Z jaką prędkością uderzy w Ziemię?

   Pomiń opory ruchu, pomiń grawitację ciał innych niż Ziemia i pocisk.

autor: Maksymilian Wdowiarz–Bilski

Rozwiązanie

Zadanie możemy rozwiązać analizując energię pocisku w czasie lotu. Z racji tego, że ciało zostaje wystrzelone bezpośrednio z geograficznego bieguna Ziemi, w skład jego prędkości początkowej nie wchodzi lokalna prędkość obrotu powierzchni Ziemi (na biegunie równa 0) – jest więc ona równa dokładnie v. W analizowanym układzie energia całkowita pocisku w dowolnym momencie będzie opisywana sumą jego energii potencjalnej grawitacji i jego energii kinetycznej. Na początku obliczymy energię całkowitą obiektu w momencie wystrzelenia:

$$E_{c0} = E_{g0} + E_{k0} = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} + \frac{m\sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}^2}{2} = -\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus}$$

Gdzie m oznacza masę analizowanego obiektu (tu: pocisku). Z zasady zachowania energii, wartość energii całkowitej pocisku będzie niezmienna w czasie, zatem:

$$E_c = E_{c0} = const.$$

Znając jej wartość możemy wywnioskować maksymalną odległość od Ziemi na jaką hipotetycznie mógłby oddalić się obiekt z taką energią. Ze wzoru na energię w danym miejscu $E_c = -\frac{GM_\oplus m}{r_x} + \frac{mv_x^2}{2}$, gdzie indeksem x oznaczyliśmy położenie i prędkość pocisku w pewnym momencie. We wzorze tym mamy dokładnie jeden składnik o ujemnym znaku (energię potencjalną grawitacji). Widzimy, że wraz ze wzrostem r_x, cały składnik $-\frac{GM_\oplus m}{r_x}$ będzie swoją wartością coraz bardziej zbliżał się do zera. Wiemy jednak, że energia całkowita naszego pocisku ma ustaloną stałą, ujemną wartość $E_c = -\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus m}{r_x} + \frac{mv_x^2}{2}$. Stąd mamy: $0 \leq \frac{mv_x^2}{2} = \frac{GM_\oplus m}{r_x} - \frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus}$. Przekształcając podaną nierówność otrzymujemy: $\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus} \leq \frac{GM_\oplus m}{r_x}$, stąd: $\frac{1}{2R_\oplus} \leq \frac{1}{r_x}$, a więc $r_x \leq 2R_\oplus$. Zatem dowolny obiekt znajdujący się w ziemskim polu grawitacyjnym o energii całkowitej równej $-\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus}$, nie będzie mógł znaleźć się dalej od środka Ziemi niż w odległości $2R_\oplus$. Jest to stosunkowo niewielka odległość (znacząco mniejsza niż średnia odległość Księżyca od Ziemi wynosząca ok. $60R_\oplus$; na takiej wysokości mogą znajdować się satelity znajdujące się na średnich orbitach okołoziemskich) – pozwala nam to jednoznacznie stwierdzić, że w toku naszych rozważań nie musimy uwzględniać wpływu grawitacyjnego innych obiektów niż Ziemia (w szczególności Słońca), ponieważ ciało znajduje się w obszarze przeważania oddziaływania grawitacyjnego Ziemi (tzw. strefa Hilla dla Ziemi).

Obiekt osiągnie maksymalną odległość $2R_\oplus$, jeśli wartość energii kinetycznej w pewnym momencie będzie równa 0, a więc jego prędkość także będzie równa 0. W analizowanym przypadku taka sytuacja w istocie zaistnieje. Nietrudno zauważyć, że w toku całego lotu, siła grawitacji działająca na pocisk jest skierowana pionowo – równolegle do kierunku ruchu pocisku. Zatem w dowolnym momencie siła nie zmienia kierunku ruchu (wektora prędkości) obiektu, ale zmienia wartość jego prędkości – zmniejsza, jeśli wektor prędkości jest zwrócony „do góry" lub zwiększa, jeśli obiekt już zaczął spadać. Ustalmy, że prędkość ma znak dodatni w momencie gdy piłka oddala się od Ziemi, a ujemny – gdy ponownie do niej się zbliża. Ponieważ na początku prędkość ma znak dodatni – jeśli pokażemy, że w pewnym momencie będzie miała ona ujemny znak, będzie to ostateczny dowód na to, że w pewnym momencie (pośrednim) prędkość musiała być równa dokładnie 0.

Dowiedliśmy już, że pocisk nie znajdzie się od środka Ziemi dalej niż w odległości $2R_\oplus$, zatem siła grawitacji działająca na niego w dowolnym momencie będzie nie mniejsza niż $\frac{GM_\oplus m}{(2R_\oplus)^2} = \frac{GM_\oplus m}{4R_\oplus^2} \leq |F_g|$. Możemy więc zapisać pewne ograniczenie na prędkość pocisku $v(t)$ (pamiętając o znakach) po czasie t od wystrzału:

$$v(t) \leq v_0 - \frac{|F_g|}{m} \cdot t = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} - \frac{GM_\oplus}{4R_\oplus^2} \cdot t$$

Bowiem przyspieszenie z drugiej zasady dynamiki Newtona: $a = \frac{F}{m}$ działa na pocisk zawsze w tym samym kierunku (w omawianym przypadku), a powyższy wzór jest przypadkiem, gdyby przyspieszenie to działało „trochę słabiej" – było stałym przyspieszeniem o wartości $-\frac{GM_\oplus}{4R_\oplus^2}$; wzór $v_0 - \frac{|F_g|}{m} \cdot t$ jest wzorem na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Stąd bez wątpienia stwierdzamy, że istnieje pewne dodatnie t, dla którego $v(t)$ będzie musiała być ujemna (lub równa 0) – np. dla $t = \sqrt{\frac{16R_\oplus^3}{GM_\oplus}}$ dostajemy $v(t) \leq 0$.

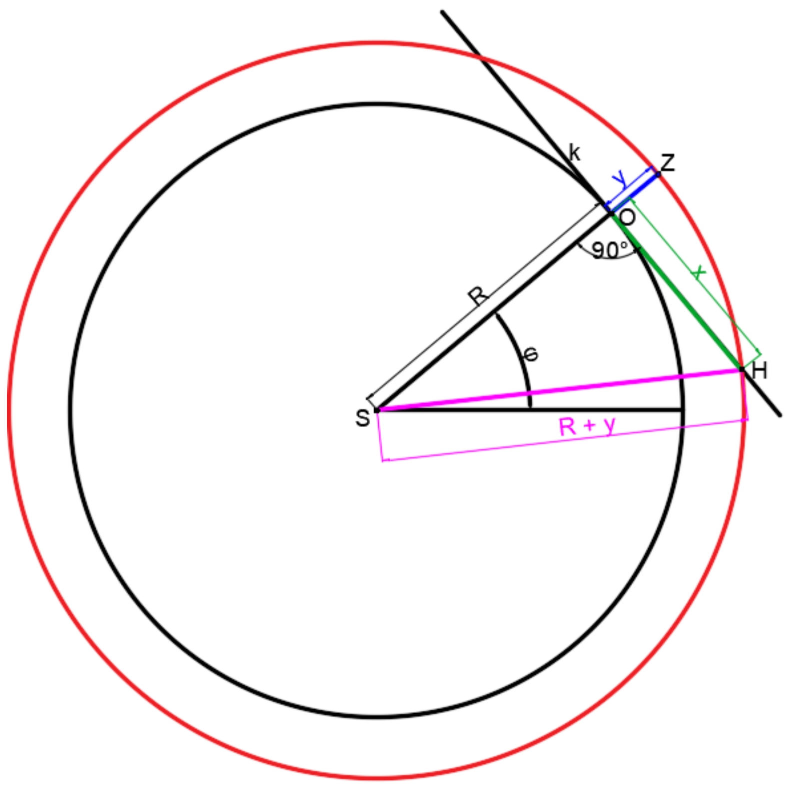
Udowodniliśmy więc, że analizowany pocisk rzeczywiście osiągnie maksymalną odległość od środka Ziemi równą $2R_\oplus$. W takiej sytuacji wiemy zatem, że maksymalna wysokość od powierzchni Ziemi na jaką doleci pocisk wynosi dokładnie $2R_\oplus - R_\oplus = R_\oplus = 6371\text{km}$. Ponieważ od pewnego momentu pocisk będzie tylko zbliżał się do Ziemi aż nie zderzy się z nią, możemy stwierdzić, że pocisk musi kiedyś powrócić na jej powierzchnię. Z zasady zachowania energii łatwo widać, że wzór na prędkość pocisku v_r zależy tylko i wyłącznie od odległości pocisku r od środka masy (Ziemi): $-\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus m}{r} + \frac{mv_r^2}{2}$, czyli: $v_r = \sqrt{GM_\oplus \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R_\oplus}\right)}$. W momencie zderzenia odległość pocisku od środka Ziemi jest jednak oczywiście taka sama, co w momencie wystrzału – równa $R_\oplus$. To pozwala nam jednoznacznie stwierdzić, że w przypadku, gdy pomijamy opory ruchu, prędkość pocisku w momencie zderzenia z Ziemią będzie dokładnie taka sama (choć będzie mieć oczywiście przeciwny zwrot), co w momencie wystrzału – równa $v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} \approx 7{,}91\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

autor rozwiązania: Michał Jagodziński

2. Satelity polarne megakonstelacji *OneWeb* poruszają się po niemal kołowej orbicie, na wysokości 980 km nad powierzchnią Ziemi. Przez I_1 oznaczmy moc sygnału odbieranego od pojedynczego satelity w momencie, gdy przelatuje on nad obserwatorem (obserwator widzi go w zenicie), a przez I_2 moc sygnału wtedy, gdy satelita znajduje się tuż nad horyzontem obserwatora. Wyznacz stosunek I_1/I_2. W rozwiązaniu przyjmij, że Ziemia jest idealną kulą, a rozpatrywany satelita wysyła sygnał izotropowo (z równą mocą w każdym kierunku). Pomiń wpływ atmosfery ziemskiej.

autor: Maksymilian Wdowiarz–Bilski

Rozwiązanie



Rysunek 1: Schemat orbity satelity megakonstelacji *OneWeb* (czerwony okrąg)

Rozważmy oznaczenia zgodne z powyższym rysunkiem i obserwatora na dowolnej szerokości geograficznej ϕ oraz długości geograficznej λ takiej, że satelita widoczny jest w zenicie. Prosta k przedstawia horyzont obserwatora, a jego przecięcie z orbitą satelity (punkt H) mówi, jaka jest odległość $x = |OH|$, gdy satelita widoczny jest na horyzoncie. Odległość obserwatora od satelity w zenicie (punkt Z) oznaczona jest na rysunku jako $y = |OZ|$. Widzimy, że y jest równa po prostu podanej w zadaniu wysokości satelity nad powierzchnią Ziemi: $y = 980\,\mathrm{km}$. Odległość $|SO|$ jest równa promieniowi Ziemi (podanemu w karcie stałych) $|SO| = R_\oplus \approx 6371\,\mathrm{km}$. Do szczęścia potrzeba nam jedynie wyrazić x za pomocą znanych długości. Spójrzmy na trójkąt SOH. Jako, iż k jest prostą styczną do okręgu, $\angle SOH$ jest kątem prostym. W takim razie, możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, zapisując:

$$|SO|^2 + |OH|^2 = |SH|^2$$

$$R^2 + x^2 = (R + y)^2$$

$$x^2 = (R + y)^2 - R^2$$

$$x = \sqrt{(R + y)^2 - R^2}$$

Podstawiając wypisane powyżej dane, otrzymamy:

$$x \approx 3667\,\text{km}$$

Zauważmy, że izotropowość oznacza że natężenie promieniowania naszego satelity maleje z kwadratem odległości od obserwatora (gdyż jest równomiernie rozłożone na polu sfery $4\pi r^2$). W takim razie szukany w zadaniu stosunek wynosi:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{x^2}{y^2} = 14$$

Co należało policzyć.

autor rozwiązania: Olaf Krupiński

3. Statek kosmiczny o masie $m = 40\,000\,\mathrm{kg}$ znajduje się w odległości $r = 5{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{m}$ od Słońca. Silnik statku jest stale włączony i generuje siłę $F_S = 800\,\mathrm{N}$ o zwrocie przeciwnym do zwrotu siły grawitacji Słońca działającej na statek F_G. Oblicz wartość prędkości i jej kierunek, jaką musi mieć statek, aby poruszać się po kołowej orbicie wokół Słońca o promieniu r. Przedyskutuj, czy utrzymanie kołowej orbity wokół Słońca byłoby możliwe, gdyby $F_S = 2F_G$. Pomiń zmianę masy statku spowodowaną działaniem silnika i wpływ grawitacji ciał innych niż Słońce na statek.

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

Niech v będzie szukaną prędkością. Statek kosmiczny ma poruszać się po orbicie kołowej, dlatego suma sił działających na niego musi pełnić rolę siły dośrodkowej – być równa mv^2/r i skierowana do środka okręgu, czyli w stronę Słońca. Stosując tę konwencję znaków mamy:

$$F_G - F_S = \frac{mv^2}{r}$$

Siła grawitacji Słońca działająca na statek jest równa $F_G = \frac{GM_\odot m}{r^2}$, bo statek znajduje się w odległości r od Słońca, które ma masę $M_\odot$. Podstawiamy, a następnie mnożymy obustronnie równanie przez r/m aby otrzymać:

$$\frac{GM_\odot m}{r^2} - F_S = \frac{mv^2}{r}$$
$$\frac{GM_\odot}{r} - \frac{r}{m}F_S = v^2$$

Wyrażenie z prędkością v występuje tylko po prawej stronie. Obustronnie pierwiastkujemy i mamy:

$$v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r} - \frac{r}{m}F_S}$$

Podstawiamy wartości liczbowe używając danych z treści oraz tabeli stałych

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{5{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{m}} - \frac{5{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \cdot 800\,\mathrm{N}}{40\,000\,\mathrm{kg}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{13{,}2733 \times 10^{19}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg}}}{5{,}00 \times 10^{10}\,\mathrm{m}} - \frac{4000 \times 10^{10}\,\mathrm{N \cdot m}}{40\,000\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{2{,}654\,66 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}} - 0{,}1 \times 10^{10}\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}}}$$

$$v = \sqrt{2{,}654\,66 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}} - 1 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{1{,}654\,66 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}}}$$

$$v = \sqrt{16{,}5466 \times 10^{8}\,\frac{\frac{\mathrm{m \cdot kg}}{\mathrm{s^2}} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} = 10^4 \cdot \sqrt{16{,}5466\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}} \approx 4{,}06 \times 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

I otrzymujemy szukany wynik. W sytuacji bez silnika ($F_S = 0$) otrzymalibyśmy $v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} \approx 51{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, czyli pierwszą prędkość kosmiczną.

Zastanówmy się nad sytuacją, gdy $F_S = 2F_G$. Wtedy

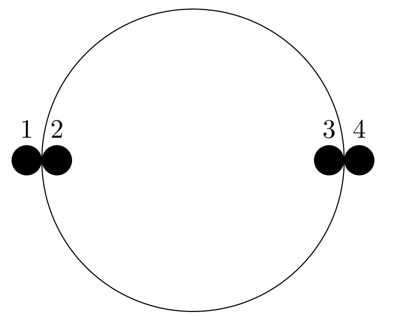
$$F_G - F_S = \frac{mv^2}{r}$$
$$v^2 = \frac{r}{m}(F_G - F_S) = \frac{r}{m}(F_G - 2F_G) = -\frac{r}{m}F_G$$

Jednak $r, m, F_G > 0$, czyli $-\frac{r}{m}F_G < 0$. Kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, dlatego $v^2 \geq 0$. W związku z tym otrzymaliśmy sprzeczność, czyli taka sytuacja nie jest możliwa – gdyby silnik statku działał z taką siłą i był skierowany tak, jak w treści, to statek nie mógłby utrzymać kołowej orbity.

Problem postawiony w zadaniu był zbliżony do problemu postawionego w ostatnim podpunkcie zadania drugiego przykładowego II etapu OAJ, wymagał jednak dodatkowo przeprowadzenia pełnego rachunku.

autor rozwiązania: Krzysztof Król

4. Istnieje wiele sposobów wykrywania planet pozasłonecznych. Najwięcej z nich zostało wykrytych metodą tranzytową, polegającą na pomiarach jasności gwiazdy podczas przejścia przed nią planety. Przejście to powoduje spadek jasności gwiazdy, co pozwala wyznaczyć niektóre właściwości planety i jej orbity.



Rysunek 2: Schematyczne przedstawienie tranzytu egzoplanety. Cyframi 1-4 oznaczono kolejne kontakty, czyli momenty, gdy tarcza planety jest styczna do tarczy gwiazdy (na rysunku planeta porusza się w prawo względem gwiazdy, tzn. kontakt oznaczony cyfrą 1 następuje jako pierwszy).

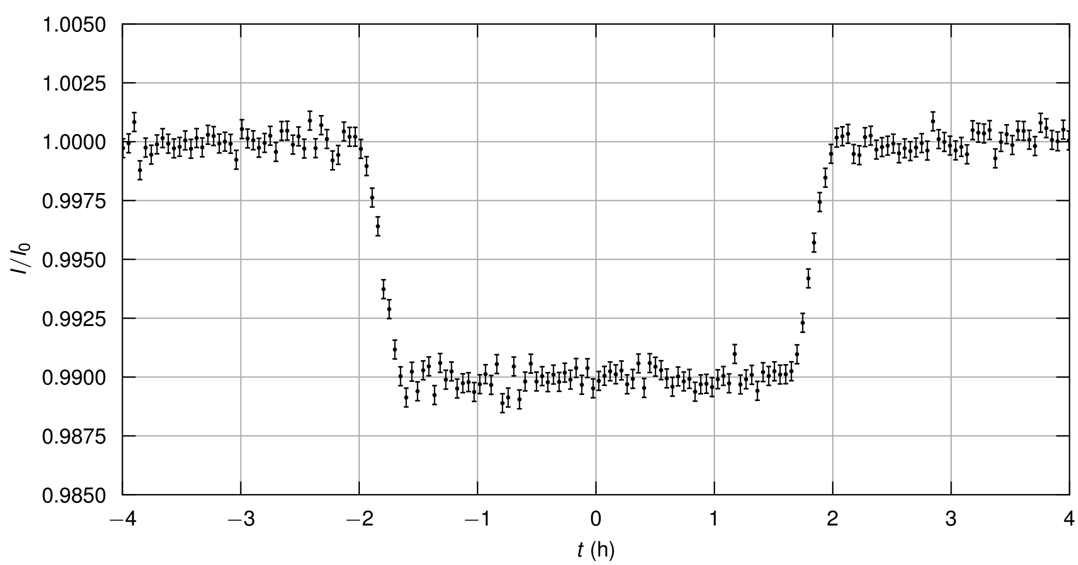
Poniżej przedstawiono wykres natężenia światła I pochodzącego od pewnej gwiazdy podczas tranzytu planety na tle jej tarczy (poza tranzytem $I/I_0 = 1$). Wyniki obserwacji przedstawiono wraz z niepewnościami pomiaru. Pomiary przeprowadzano w równych odstępach czasu. Tranzyt był centralny, czyli cięciwa po której poruszała się planeta przed gwiazdą jest średnicą gwiazdy.

a) Zakładając, że jasność powierzchniowa gwiazdy jest stała, a planeta nie emituje wykrywalnego promieniowania, wyznacz stosunek promienia planety do promienia gwiazdy.

b) Kiedy nastąpiły kolejne kontakty? Odczytaj z wykresu wartości t_1, t_2, t_3, t_4.

c) Na podstawie innych pomiarów stwierdzono, że planeta porusza się po orbicie kołowej z prędkością 44 km/s. Korzystając z tej informacji, wyznacz promień gwiazdy i promień planety. Możesz założyć, że orbita tranzytującej planety ma promień dużo większy od promieni obu ciał.

d) Przed tranzytem wyznaczono jasność obserwowaną gwiazdy $m = 14{,}71^{\mathrm{m}}$ (magnitudo). W trakcie tranzytu jasność zmieniła się o $0{,}01^{\mathrm{m}}$. Jaka była jasność obserwowana gwiazdy w trakcie tranzytu?



Rysunek 3: Wykres stosunku natężenia światła gwiazdy do natężenia poza tranzytem od czasu.

autor: Piotr Jędrzejczyk

Rozwiązanie

a) Pole przekroju gwiazdy wynosi πR^2, a planety – πr^2, gdzie R i r to promienie odpowiednio gwiazdy i planety. Jako że jasność powierzchniowa gwiazdy jest stała, obserwowane natężenie emitowanego przez nią światła jest wprost proporcjonalne do emitującej światło powierzchni jej przekroju. Kiedy planeta znajduje się w całości na tle gwiazdy, obserwowana powierzchnia przekroju gwiazdy emitująca światło wynosi $\pi R^2 - \pi r^2$. Zatem stosunek natężenia w trakcie tranzytu I_t do natężenia poza tranzytem I_0 wynosi:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

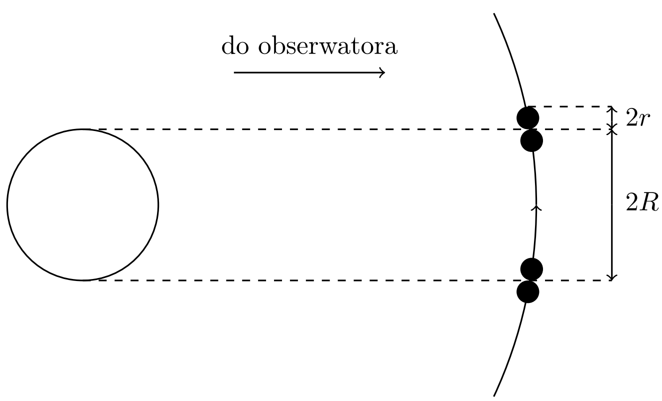
Stąd stosunek promienia planety do promienia gwiazdy wynosi:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \frac{I_t}{I_0}}$$

Na podstawie wykresu możemy stwierdzić, że minimalne względne natężenie światła, odpowiadające czasowi, gdy planeta przebywa w całości na tle gwiazdy, wynosi $\frac{I_t}{I_0} = 0{,}99$, zatem szukany stosunek promieni wynosi:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - 0{,}99} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1.$$

b) Czasy kolejnych kontaktów wynoszą: $t_1 = -2\,\mathrm{h}$, $t_2 = -1{,}64\,\mathrm{h}$, $t_3 = 1{,}64\,\mathrm{h}$, $t_4 = 2\,\mathrm{h}$. Akceptowane będą niewielkie odchylenia od tych wartości.



Rysunek 4: Schematyczne przedstawienie tranzytu egzoplanety widzianego „z góry". Przedstawione położenia planety odpowiadają, rozpoczynając od dołu, kolejnym kontaktom.

c) Skoro promień orbity planety jest znacznie większy od promienia gwiazdy, możemy założyć, że w czasie trwania tranzytu planeta poruszała się w przybliżeniu po prostej ze stałą prędkością, równą jej prędkości orbitalnej, prostopadle do kierunku patrzenia. W czasie między pierwszym a czwartym kontaktem planeta pokonała odległość równą sumie średnicy swojej oraz gwiazdy (patrz: rysunek 4). Jej prędkość orbitalna jest zatem równa:

$$v = \frac{2(R + r)}{t_4 - t_1} = \frac{2R(1 + \frac{r}{R})}{t_4 - t_1}.$$

Promień gwiazdy wynosi więc:

$$R = \frac{v(t_4 - t_1)}{2(1 + \frac{r}{R})}.$$

Po podstawieniu wartości v podanej w poleceniu, stosunku $\frac{r}{R}$ wyznaczonego w podpunkcie a) oraz wartości t_1 i t_4 wyznaczonych w b) otrzymujemy:

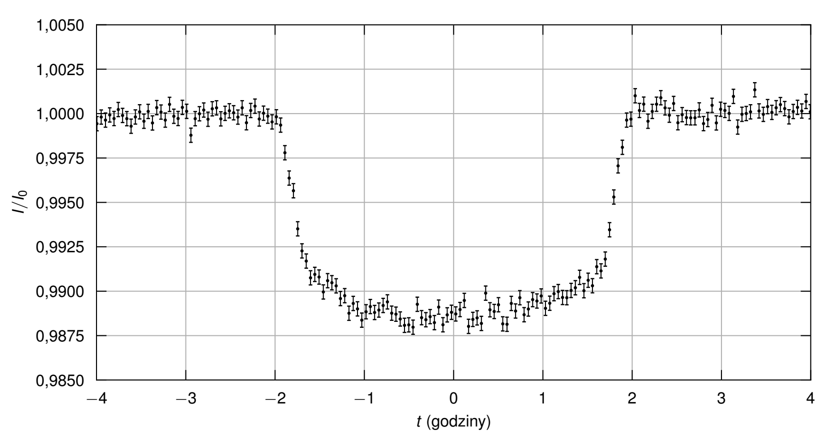
$$R = \frac{44\,\mathrm{km/s} \cdot (2\,\mathrm{h} - (-2\,\mathrm{h}))}{2(1 + \frac{1}{10})} = \frac{44\,\mathrm{km/s} \cdot 4 \cdot 3600\,\mathrm{s}}{\frac{22}{10}} = 288\,000\,\mathrm{km}.$$

Promień planety wynosi natomiast:

$$r = \frac{r}{R} \cdot R = 28\,800\,\mathrm{km}.$$

W powyższym rozumowaniu można było skorzystać z dowolnej pary kontaktów. Użycie pierwszego i czwartego daje jednak najdokładniejszy wynik z uwagi na to, że odstęp czasu między nimi jest najdłuższy.
d) Wyrażana w magnitudo wielkość gwiazdowa jest tym większa, im ciemniejszy jest dany obiekt. Skoro podczas tranzytu obserwowana jasność gwiazdy zmalała, jej wielkość gwiazdowa musiała wzrosnąć, zatem wyniosła ona $14{,}72^{\mathrm{m}}$.
Podane w treści założenie o stałej jasności powierzchniowej jest jedynie przybliżeniem. W rzeczywistości jasność powierzchniowa gwiazdy spada wraz z odległością od jej centrum. Wynika to z faktu, że atmosfera gwiazdy jest nieprzezroczysta, zatem patrząc się na środek jej tarczy obserwator jest w stanie zajrzeć w głębsze (i gorętsze) warstwy atmosfery niż patrząc się na jej krawędź (którą widzi „z boku"), kiedy widzi wyżej położone, i co za tym idzie, chłodniejsze i ciemniejsze, warstwy atmosfery. Zjawisko to jest zwane pociemnieniem brzegowym i można je zaobserwować na powierzchni Słońca (rys. 5). Uwzględniając ten efekt, podana w treści zadania krzywa blasku powinna przypominać tą na rys. 6.

Rysunek 5: Zdjęcie Słońca z widocznym pociemnieniem brzegowym



Rysunek 6: Krzywa blasku gwiazdy podczas tranzytu z uwzględnieniem pociemnienia brzegowego

Dla innych zakresów długości fali gwiazdy mogą przejawiać efekt pojaśnienia brzegowego, czyli efekt odwrotny do opisanego powyżej. Dla Słońca jest to jednak dopiero daleka podczerwień i fale radiowe.

autor rozwiązania: Piotr Jędrzejczyk