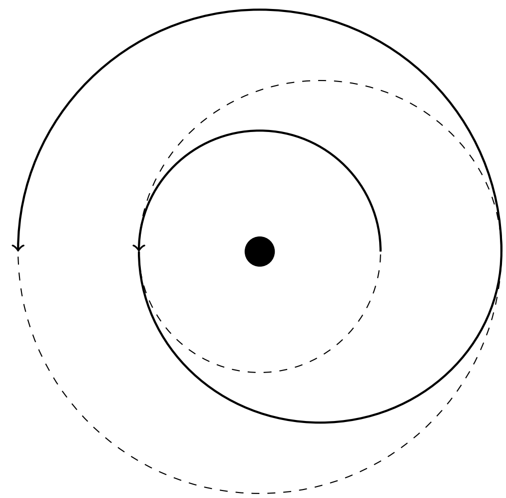
Rozwiązania serii I (teoretycznej)

1. Transfer Hohmanna to manewr pozwalający na zmianę promienia orbity danego obiektu. Polega on na wprowadzeniu ciała na orbitę eliptyczną, która jest styczna zarówno do początkowej, jak i docelowej orbity kołowej (patrz rysunek).



Rysunek 1: Schemat transferu Hohmanna. Pogrubioną linią zaznaczono tor ruchu obiektu.

Statek kosmiczny, wystrzelony z Ziemi, wprowadzono na orbitę transferową Hohmanna w celu wysłania go na Marsa. Możesz założyć, że w czasie lotu wpływ grawitacyjny planet jest zaniedbywalny w porównaniu z grawitacją Słońca.

a) Oblicz czas, po jakim statek doleciał na Marsa. Załóż, że został on wystrzelony w takim momencie, że wzajemne położenie planet było optymalne i podróż trwała możliwie krótko.
b) Chwilowa prędkość ciała na orbicie o półosi wielkiej a w odległości r od ciała centralnego o masie M dana jest wzorem:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Oblicz, ile wynosiła początkowa prędkość statku względem Ziemi. Pomiń wpływ jej grawitacji.

autor: Piotr Jędrzejczyk

Rozwiązanie

Orbita transferowa jest styczna zarówno do orbity Ziemi, jak i do orbity Marsa. Oznacza to, że odległość jej peryhelium od Słońca jest równa promieniowi orbity Ziemi a_Z, a odległość jej aphelium – promieniowi orbity Marsa a_M. Spełnione są zatem zależności:

$$a(1-e) = a_Z$$

oraz

$$a(1+e) = a_M,$$

gdzie a i e to odpowiednio półoś wielka i mimośród orbity transferowej. Dodając oba równania stronami, otrzymujemy:

$$2a = a_Z + a_M,$$

zatem półoś wielka orbity transferowej wynosi:

$$a = \frac{a_Z + a_M}{2} = 1{,}26\,\mathrm{au} = 1{,}89 \times 10^{11}\,\mathrm{m}.$$

Wyznaczmy okres orbity transferowej korzystając z III prawa Keplera. Z równania

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(1\,\mathrm{y})^2}{(1\,\mathrm{au})^3},$$

zachodzącego dla obiektów poruszających się wokół Słońca, otrzymujemy

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{1\,\mathrm{au}}\right)^3}\,\mathrm{y} = 1{,}41\,\mathrm{y} = 517\,\mathrm{d}$$

Zauważmy jednak, że podczas transferu statek pokonuje tylko połowę swojej orbity – od peryhelium do aphelium, zatem czas transferu jest równy połowie okresu orbity transferowej i wynosi:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = 258\,\mathrm{d}.$$

Prędkość orbitalna Ziemi w jej obiegu dookoła Słońca wynosi:

$$v_Z = \sqrt{\frac{GM}{a_Z}} = 29{,}78\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Prędkość statku kosmicznego w peryhelium wynosi, zgodnie ze wzorem podanym w treści:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a_Z} - \frac{1}{a}\right)} = 32{,}73\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}},$$

a jej zwrot jest taki sam, jak zwrot prędkości Ziemi, zatem prędkość względna statku kosmicznego i Ziemi wynosi:

$$\Delta v = v - v_Z = 2{,}95\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

autor rozwiązania: Piotr Jędrzejczyk

2. Zaobserwowano gwiazdę o jasności obserwowanej $m = 9{,}83^{\,\mathrm{m}}$. Teleskopem SALT (Wielki Teleskop Południowoafrykański) wykonano jej widmo, na podstawie którego stwierdzono, że jest ona bardzo podobna do Słońca.

   a) Oblicz odległość do tej gwiazdy.

   b) Jaką jasność obserwowaną miałaby ta gwiazda, gdyby jej temperatura efektywna była o 77,8% większa, a jej promień pozostał bez zmian? Przyjmij, że gwiazda promieniuje jak ciało doskonale czarne.

   c) Na diagramie Hertzsprunga–Russella zaznacz literą A obecne położenie tej gwiazdy. Literą B zaznacz położenie tej gwiazdy, gdyby była dwa razy gorętsza, ale dalej znajdowała się na ciągu głównym. Literą C zaznacz, gdzie znajdzie się ta gwiazda kilka tysięcy lat po zakończeniu spalania wodoru w jądrze.

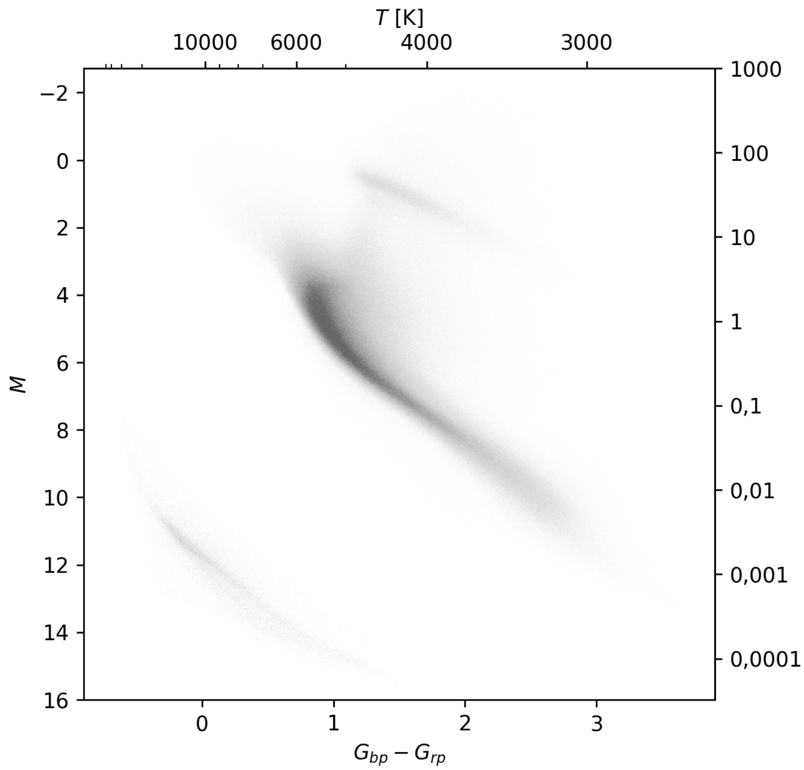
autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

a) Zacznijmy od zapisania równania Pogsona, porównującego jasność obserwowaną gwiazdy m do jasności absolutnej Słońca $M_\odot$

$$m - M_\odot = 2{,}5 \log \frac{I_\odot}{I}$$

gdzie $I_\odot$ to strumień docierający ze Słońca na odległość 10 pc (wynika to z definicji jasności absolutnej), a I to strumień docierający do SALT z gwiazdy opisanej w zadaniu. log oznacza logarytm dziesiętny.



Rysunek 2: Diagram Hertzsprunga–Russela. Źródło danych: Gaia.

$$4{,}83^{\,\mathrm{m}} - 9{,}83^{\,\mathrm{m}} = 2{,}5 \log \left[\frac{L\odot}{4\pi (10\,\mathrm{pc})^2} \left(\frac{L}{4\pi d^2} \right)^{-1} \right]$$

$$5^{\,\mathrm{m}} = 2{,}5 \log \left[\frac{L\odot}{L} \left(\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \right)^2 \right]$$

gdzie d to szukana odległość, a L to moc promieniowania gwiazdy. Wiemy, że gwiazda jest bardzo podobna dla Słońca, dlatego przyjmujemy $L \approx L_\odot$.

$$\log \left[\left(\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \right)^2 \right] = 2$$

W ogólności rozwiązywanie równań z logarytmami wymaga korzystania z kalkulatora naukowego lub znania wartości logarytmów. Tutaj jednak sytuacja jest prosta – wiemy, że $\log 100 = 2$. Podobnie na tegorocznym finale olimpiady wartości występujące w logarytmach (o ile takowe się pojawią) będą dostosowane tak, by były możliwe do policzenia kalkulatorem prostym, albo podamy wartości logarytmów. Mamy więc

$$\left(\frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \right)^2 = 100 \implies d = 10\,\mathrm{pc}\sqrt{100} = 100\,\mathrm{pc}$$

b) Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna, dla doskonale czarnej kuli

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

gdzie L to moc promieniowania ciała, R to jego promień, σ to stała Stefana-Boltzmanna, a T to jego temperatura. Zauważmy, że dla $T' = 1{,}778T$:

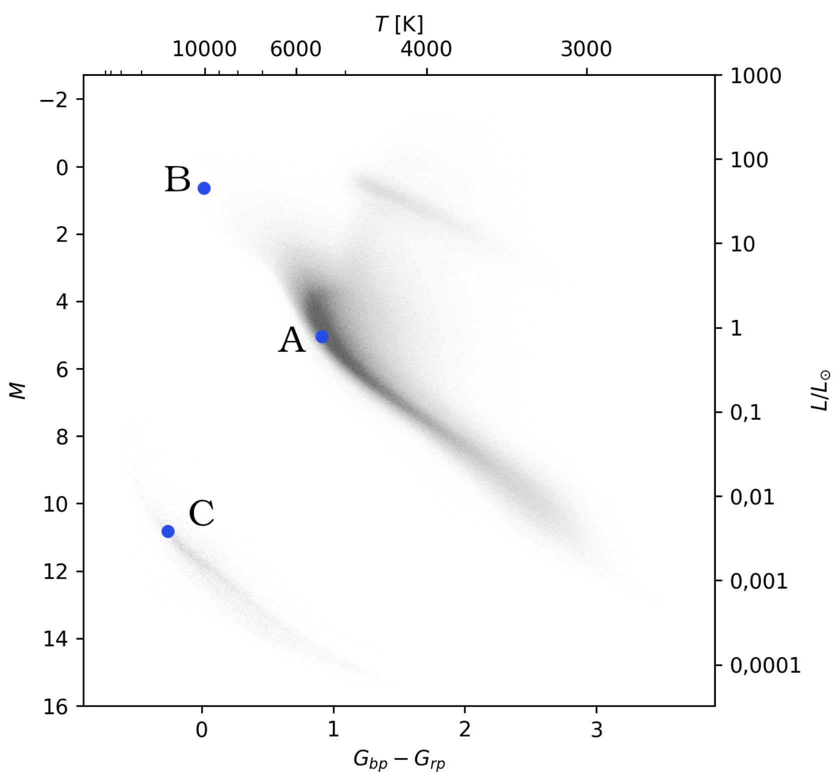
$$L' = 4\pi R^2 \sigma T'^4 = 1{,}778^4 4\pi R^2 \sigma T^4 = 1{,}778^4 L \approx 10L$$

Równaniem Pogsona porównujemy gwiazdę o mocy promieniowania L do gwiazdy o mocy promieniowania L':

$$m' - m = 2{,}5 \log \left[\frac{L}{4\pi d^2} \frac{4\pi d^2}{L'} \right] = 2{,}5 \log \frac{L}{L'} = 2{,}5 \log \frac{1}{10} = -2{,}5$$

Stąd $m' = m - 2{,}5^{\,\mathrm{m}} = 7{,}33^{\,\mathrm{m}}$.

c) Gwiazd obecnie ma jasność absolutną $M \approx 4{,}83^{\,\mathrm{m}}$ i temperatę $T \approx 5600\,\mathrm{K}$, więc możemy z łatwością zaznaczyć punkt A. Gdyby gwiazda miała dwa razy wyższą temperaturę, ale dalej znajdowała się na ciągu głównym, to byłaby białym lub biało-niebieskim karłem typu B. Po zakończeniu spalania wodoru i odrzuceniu otoczki gwiazda stanie się białym karłem.



autor rozwiązania: Krzysztof Król

3. Wokół gwiazdy o temperaturze efektywnej $T = 10\,000\,\mathrm{K}$ i promieniu $R = 2{,}5R_\odot$ krąży kometa na orbicie eliptycznej o wielkiej półosi $a = 5\,\mathrm{au}$ i mimośrodzie (ekscentryczności) $e = 0{,}9$. Załóż, że kometa w rozważanych momentach znajduje się w równowadze termicznej, promieniuje i absorbuje promieniowanie jak ciało doskonale czarne, a jej temperatura jest taka sama na całej jej powierzchni. Oblicz temperaturę komety i długość fali, w której przypada maksimum jej mocy promieniowania gdy kometa znajduje się w perycentrum. Jak nazywamy fale elektromagnetyczne o takiej długości i jakimi instrumentami możemy je rejestrować?
Wskazówka: Równowaga termiczna oznacza, że ciało chwilowo musi wypromieniowuje tyle samo energii, ile energii jest przez nie przyjmowane. Jego temperatura się wtedy (chwilowo) nie zmienia.

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

Ciałem doskonale czarnym nazywamy taki obiekt, który pochłania całe padające na niego promieniowanie. Niewiele jednak osób wie, że po pochłonięciu tej energii, ciało doskonale czarne całą ją oddaje w postaci promieniowania termicznego (kłania się tu zasada zachowania energii). Zależność mocy wypromieniowanej w ten sposób energii L od temperatury T i rozmiarów rozważanego ciała R opisuje prawo Stefana–Boltzmanna, zgodnie z którym:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Gdzie σ jest stałą równą $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$. W zadaniu mamy do czynienia z dwoma ciałami doskonale czarnymi: gwiazdą i kometą. Zgodnie z powyższym wzorem, promieniowanie gwiazdy bez trudu policzymy z danych nam parametrów:

$$L_G = 4\pi R_G^2 \sigma T_G^4$$

Podobny wzór możemy zapisać dla komety (zakładamy tu, że kometa jest kulą o nieznanym promieniu R_k):

$$L_k = 4\pi R_k^2 \sigma T_k^4$$

Jednakże tu natrafiamy na problem: nie znamy żadnej z wielkości podanych we wzorze. Zastanówmy się nad mocą L_k. Zgodnie z wcześniejszym wywodem, musi ona równać się mocy promieniowania padającego na kometę. Standardowo, załóżmy że nasza gwiazda promieniuje izotropowo (równomiernie we wszystkie strony), a kometa znajduje się w odległości d od niej. Rozważmy sferę o promieniu d i środku w gwieździe. Zauważmy, że nasza kometa pokrywa (zasłania) na tej sferze placek (koło) o promieniu R_k, a więc polu $s = \pi R_k^2$ (nie jest to oczywisty wynik i w celu zrozumienia polecamy to sobie narysować; w szczególności korzystamy tu z przybliżenia, że kometa jest mała w stosunku do odległości d). W takim razie na kometę pada ułamek promieniowania gwiazdy:

$$L_k = L_G \cdot \frac{s}{S_d} = L_G \cdot \frac{\pi R_k^2}{4\pi d^2} = L_G \cdot \frac{R_k^2}{4d^2}$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na pole powierzchni rozważanej sfery $S_d = 4\pi d^2$. Wstawmy nasz wynik do prawa Stefana-Boltzmanna dla komety:

$$L_G \cdot \frac{R_k^2}{4d^2} = 4\pi R_k^2 \sigma T_k^4$$

W magiczny sposób promień komety R_k skraca się, co oznacza że temperatura ciała umieszczonego w izotropowym promieniowaniu nie zależy od jego pola powierzchni. Po przekształceniu otrzymamy:

$$L_G = 16\pi d^2 \sigma T_k^4$$

Z czego chcielibyśmy dostać temperaturę komety:

$$T_k = \sqrt[4]{\frac{L_G}{16\pi d^2 \sigma}}$$

i wstawiamy moc promieniowania z prawa Stefana–Boltzmanna dla gwiazdy:

$$T_k = \sqrt[4]{\frac{4\pi R_G^2 \sigma T_G^4}{16\pi d^2 \sigma}}$$

po uproszczeniu dostajemy całkiem zgrabny wynik:

$$T_k = T_G \sqrt{\frac{R_G}{2d}}$$

Wszystko super, ale w treści zadania nie podano nam odległości kometa – gwiazda d, którą musimy jeszcze policzyć. Wiemy jednak, że kometa znajduje się w perycentrum (minimalnej odległości) orbity eliptycznej o wielkiej półosi: $a = 5\,\mathrm{au}$ i mimośrodzie $e = 0,9$. Korzystając ze wzoru na perycentrum elipsy:

$$d = a(1-e) \Rightarrow d = 0{,}1a = 0{,}5\,\mathrm{au}$$

Finalnie możemy podstawić do wzoru:

$$T_k = T_G \sqrt{\frac{R_G}{2a(1-e)}} = 1080\ \mathrm{K}$$

Jakby tego było mało, trzeba jeszcze policzyć długość fali odpowiadającą maksimum promieniowania. W zadaniu rozważamy ciało doskonale czarne, dlatego korzystamy w tym celu z prawa Wiena:

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}}$$

gdzie $b = 2{,}90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$ jest stałą Wiena. Wystarczy podstawić tu wyliczoną uprzednio temperaturę, aby dostać:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = 2{,}7\,\mu\mathrm{m}$$

Dla pocieszenia czytelnika, zadanie to poziomem nie odbiega zbytnio od prostszych zadań I i II etapu licealnej Olimpiady Astronomicznej.

autor rozwiązania: Olaf Krupiński