

Drogi uczniu,

Gratulujemy awansu do finału I Olimpiady Astronomicznej Juniorów! Obie części zawodów (teoretyczna i praktyczna) będą trwały po **135 minut**. Na zawodach będziesz mieć zapewnione wszystkie niezbędne przyrządy i materiały potrzebne do rozwiązywania zadań. Rozwiązanie każdego zadania umieść na osobnej kartce. Każdą stronę podpisać kodem uczestnika, numerem zadania, numerem strony w ramach rozwiązania i łączną liczbą stron rozwiązania. Rozwiązania powinny zawierać opis wszystkich kroków rozumowania, nie mogą zawierać luk logicznych oraz powinny być spisane w sposób czytelny i przejrzysty. Prace nieczytelne lub niepoprawnie podpisane mogą nie zostać sprawdzone. W razie problemów, wątpliwości, chęci wyjścia do toalety lub konieczności pobrania dodatkowych kartek należy zasygnalizować to podniesieniem ręki. Komisja nie udziela odpowiedzi na pytania związane z treścią zadań.

Powodzenia!

Wybrane stałe astronomiczne i fizyczne:

$1 \text{ au} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$	jednostka astronomiczna
$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$	parsek
$M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$	masa Ziemi
$R_{\oplus} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$	średni promień Ziemi
$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$	masa Słońca
$L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26} \text{ W}$	moc promieniowania Słońca
$G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$	stała grawitacji
$c = 2,998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	prędkość światła w próżni
$\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$	stała Stefana–Boltzmann
$\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	zredukowana stała Plancka
$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	stała Boltzmann

Dodatkowe informacje

Górne ograniczenie na masę białego karła wynosi około $1,4M_{\odot}$, a górne ograniczenie na masę gwiazdy neutronowej to około $2,5M_{\odot}$.

Prędkość kątową ω definiujemy jako

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{T}$$

gdzie $\Delta\alpha$ to kąt przebyty przez ciało w czasie Δt , a T to okres orbity tego ciała.

Apocentrum orbity eliptycznej znajduje się w odległości $(1+e)a$ od jej ogniska, a perycentrum w odległości $(1-e)a$ od ogniska, e to jej mimośród (ekscentryczność), z definicji równy

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

gdzie a to wielka półoś tej orbity, a b to półoś mała.

1. Czerwony karzeł obiega obiekt zwarty (masywne, małe i bardzo trudne do bezpośredniej obserwacji ciało), znajdując się na orbicie ustawionej do linii patrzenia tak, że możliwe było zmierzenie jego maksymalnej i minimalnej prędkości na orbicie – wartości tych prędkości wynosiły odpowiednio $v_{max} = 188 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ i $v_{min} = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Ponadto stwierdzono, że okres orbitalny gwiazdy jest równy $P = 63 \text{ d}$. Oblicz wielką półość orbity czerwonego karła i masę zwartego obiektu. Stwierdź, czym może on być.

Wskazówki: Czerwone karły to małowasywne gwiazdy, a oczekujemy, że niewidoczny towarzysz gwiazdy z zadania będzie masywny, dlatego możesz przyjąć, że masa czerwonego karła w tym układzie jest zaniedbywalna.

Prędkość na orbicie eliptycznej o wielkiej półosi a wokół masywnego ciała centralnego o masie M w odległości r dana jest wzorem:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

2. W badaniach nad rozwojem wczesnego wszechświata rozważa się istnienie tzw. pierwotnych czarnych dziur, które mogłyby powstać tuż po Wielkim Wybuchu w występujących ówczesznie zagęszczeniach materii.

- a) Horyzontem zdarzeń czarnej dziury (tożsamym z jej promieniem) nazywamy odległość R , po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec przyciąganiu grawitacyjnemu czarnej dziury. Wyprowadź wzór na promień horyzontu zdarzeń w zależności od masy M_{BH} czarnej dziury i stałych fizycznych.

Wskazówka: Na potrzeby zadania można założyć, że foton ma mikroskopijną, ale niezerową masę i podlega newtonowskiemu oddziaływaniu grawitacyjnemu. Poniżej horyzontu zdarzeń ma zbyt małą prędkość, żeby oddalić się od czarnej dziury. Pomiń efekty relatywistyczne.

- b) Hipotetyzuje się, że czarne dziury emitują promieniowanie termiczne zwane promieniowaniem Hawkinga. „Temperatura” czarnej dziury (czyli temperatura ciała doskonale czarnego emitującego promieniowanie o takim samym strumieniu) jest równa

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \approx \frac{1}{M_{BH}} 1,2 \times 10^{23} \text{ K} \cdot \text{kg}$$

Na potrzeby tego zadania możemy pominąć znaczenie i nazwy stałych i używać wyliczonego ich iloczynu. Wyznacz moc promieniowania czarnej dziury o masie M_{BH} .

- c) Po długim czasie, w wyniku promieniowania Hawkinga czarna dziura może wyparować, czyli cała jej masa może zostać zamieniona na promieniowanie zgodnie ze wzorem $E = mc^2$. Oblicz energię, która zostałaby wypromieniowana w wyniku parowania czarnej dziury o promieniu R .
 - d) Ostatnie chwile życia czarnej dziury (przed jej całkowitym wyparowaniem) powinny się charakteryzować jej gwałtownym pojaśnieniem. Oszacuj maksymalny promień w momencie powstania takiej pierwotnej czarnej dziury, której koniec mogłyby zostać zaobserwowany współcześnie. Przyjmij wiek wszechświata równy 13,7 mld lat. Opisz zastosowane przybliżenia.
3. Wenus jest drugą planetą od Słońca, a jej okres obiegu wynosi $T = 224,7$ dni. Wenus obraca się również dookoła własnej osi z zaskakująco niską prędkością kątową: $\omega = -1,481^\circ/\text{dzień}$, przy czym ujemna wartość tej prędkości oznacza, że Wenus obraca się przeciwnie do ruchu obiegowego wokół Słońca. Patrząc więc „z góry” na Układ Słoneczny ruch obiegowy Wenus odbywa się przeciwnie do wskazówek zegara, zaś ruch dookoła własnej osi jest zgodny ze wskazówkami zegara.

- a) Zdefiniujmy dobę słoneczną jako czas pomiędzy dwoma górowaniami Słońca. Ile wynosi doba słoneczna na Wenus?
- b) Wyraź rok wenusjański (okres obiegu Wenus dookoła Słońca) w dniach wenusjańskich (dobach słonecznych na Wenus). Czy to prawda, że dzień na Wenus jest dłuższy od roku?