Rozwiązania zadań teoretycznych III etapu

1. Czerwony karzeł obiega obiekt zwarty (masywne, małe i bardzo trudne do bezpośredniej obserwacji ciało), znajdując się na orbicie ustawionej do linii patrzenia tak, że możliwe było zmierzenie jego maksymalnej i minimalnej prędkości na orbicie – wartości tych prędkości wynosiły odpowiednio $v_{max} = 188\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ i $v_{min} = 71\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Ponadto stwierdzono, że okres orbitalny gwiazdy jest równy $P = 63\,\mathrm{d}$. Oblicz wielką półoś orbity czerwonego karła i masę zwartego obiektu. Stwierdź, czym może on być.

   Wskazówki: Czerwone karły to małomasywne gwiazdy, a oczekujemy, że niewidoczny towarzysz gwiazdy z zadania będzie masywny, dlatego możesz przyjąć, że masa czerwonego karła w tym układzie jest zaniedbywalna.

   Prędkość na orbicie eliptycznej o wielkiej półosi a wokół masywnego ciała centralnego o masie M w odległości r dana jest wzorem:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

autor: Krzysztof Król

Rozwiązanie

Ciało poruszające się po orbicie eliptycznej osiąga maksymalną prędkość w perycentrum swojej orbity, kiedy jego odległość od ciała centralnego wynosi $a(1-e)$, a prędkość minimalną osiąga w apocentrum, w odległości $a(1+e)$ od ciała centralnego, gdzie a to półoś wielka orbity, a e – jej mimośród. Po podstawieniu tych odległości do wzoru na prędkość na orbicie eliptycznej podanego w treści zadania otrzymujemy:

$$v_{max} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1-e}{a(1-e)}\right)} = \sqrt{GM\,\frac{2-1+e}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$

oraz

$$v_{min} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1+e}{a(1+e)}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}}.$$

W powyższych równaniach mamy trzy niewiadome – M, a i e. Konieczne są więc trzy równania opisujące zależności między nimi, zatem brakuje nam jeszcze jednego. Zanim jednak do tego przystąpimy, spróbujmy pozbyć się mimośrodu z równań, gdyż nie jest wymagane jego wyznaczenie. Moglibyśmy to zrobić wyznaczając wartość mimośrodu z jednego z równań i podstawiając do drugiego, natomiast da się to zrobić nieco sprytniej. Zauważmy, że iloczyn prędkości maksymalnej i minimalnej nie zależy od mimośrodu:

$$v_{max}v_{min} = \sqrt{\left(\frac{GM}{a}\right)^2 \frac{1+e}{1-e}\frac{1-e}{1+e}} = \frac{GM}{a}.$$

Pozostały nam teraz tylko dwie niewiadome – masa niewidocznego ciała i półoś wielka orbity czerwonego karła. Do ich wyznaczenia brakuje nam teraz drugiej zależności między nimi, którą możemy uzyskać z trzeciego prawa Keplera:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

z którego wyznaczamy masę:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}.$$

Podstawiając ją do wcześniejszego wzoru otrzymujemy:

$$v_{max}v_{min} = \frac{GM}{a} = \frac{4\pi^2 a^2}{P^2},$$

skąd możemy wyznaczyć półoś wielką, która wynosi:

$$a = \sqrt{\frac{v_{max} v_{min} P^2}{4\pi^2}} = \frac{P}{2\pi}\sqrt{v_{max} v_{min}}.$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy $a = 1{,}00 \times 10^{11}\,\mathrm{m} = 0{,}67\,\mathrm{au}$. Masa ciała wynosi natomiast:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} = \frac{4\pi^2 P^3 \sqrt{v_{max} v_{min}}^3}{GP^2(2\pi)^3} = \frac{P\sqrt{v_{max} v_{min}}^3}{2\pi G}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $M = 2{,}00 \times 10^{31}\,\mathrm{kg} \approx 10\,M_\odot$. Biorąc pod uwagę, że masa niewidocznego obiektu jest większa zarówno od masy Chandrasekhara (górne ograniczenie na masę białego karła), jak i granicy Tolmana-Oppenheimera-Volkoffa (górne ograniczenie na masę gwiazdy neutronowej), możemy przypuszczać, że obiekt ten jest czarną dziurą.

Zadanie to sprawiło dość duże trudności – głównie obliczeniowe – uczestnikom finału. Udało się je poprawnie rozwiązać tylko jednemu zawodnikowi. Częstym błędem popełnianym przez uczestników było korzystanie z trzeciego prawa Keplera w postaci:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(1\,\mathrm{rok})^2}{(1\,\mathrm{au})^3}.$$

Nie jest to jednak poprawne jego użycie – z tej jego postaci możemy korzystać jedynie wtedy, gdy w rozważanym układzie masa ciała centralnego jest równa jednej masie Słońca. W przypadku z zadania masa ciała centralnego jest jednak niewiadomą, zatem konieczne było wykorzystanie trzeciego prawa Keplera w formie:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

autor rozwiązania: Piotr Jędrzejczyk

2. W badaniach nad rozwojem wczesnego wszechświata rozważa się istnienie tzw. pierwotnych czarnych dziur, które mogłyby powstać tuż po Wielkim Wybuchu w występujących ówcześnie zagęszczeniach materii.

   a) Horyzontem zdarzeń czarnej dziury (tożsamym z jej promieniem) nazywamy odległość R, po której przekroczeniu nic, nawet światło, nie jest w stanie uciec przyciąganiu grawitacyjnemu czarnej dziury. Wyprowadź wzór na promień horyzontu zdarzeń w zależności od masy M_{BH} czarnej dziury i stałych fizycznych.
   Wskazówka: Na potrzeby zadania można założyć, że foton ma mikroskopijną, ale niezerową masę i podlegaja newtonowskiemu oddziaływaniu grawitacyjnemu. Poniżej horyzontu zdarzeń ma zbyt małą prędkość, żeby oddalić się od czarnej dziury. Pomiń efekty relatywistyczne.

   b) Hipotetyzuje się, że czarne dziury emitują promieniowanie termiczne zwane promieniowaniem Hawkinga. „Temperatura" czarnej dziury (czyli temperatura ciała doskonale czarnego emitującego promieniowanie o takim samym strumieniu) jest równa

   $$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \approx \frac{1}{M_{BH}}\, 1{,}2 \times 10^{23}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg}$$

   Na potrzeby tego zadania możemy pominąć znaczenie i nazwy stałych i używać wyliczonego ich iloczynu. Wyznacz moc promieniowania czarnej dziury o masie M_{BH}.

   c) Po długim czasie, w wyniku promieniowania Hawkinga czarna dziura może wyparować, czyli cała jej masa może zostać zamieniona na promieniowanie zgodnie ze wzorem $E = mc^2$. Oblicz energię, która zostałaby wypromieniowana w wyniku parowania czarnej dziury o promieniu R.

   d) Ostatnie chwile życia czarnej dziury (przed jej całkowitym wyparowaniem) powinny się charakteryzować jej gwałtownym pojaśnieniem. Oszacuj maksymalny promień w momencie powstania takiej pierwotniej czarnej dziury, której koniec mógłby zostać zaobserwowany współcześnie. Przyjmij wiek wszechświata równy 13,7 mld lat. Opisz zastosowane przybliżenia.

autorzy: Olaf Krupiński, Krzysztof Król, Maksymilian Wdowiarz-Bilski, Piotr Życki

Rozwiązanie

a) W przybliżeniu nierelatywistycznym, gdy traktujemy fotony jako cząsteczki o bardzo małej masie poruszające się z prędkością c, to możemy wyciągnąć następujący wniosek: jeśli światło nie może uciec z pola grawitacyjnego czarnej dziury, to jego prędkość jest mniejsza od drugiej prędkości kosmicznej w odległości R od środka tej czarnej dziury. Oznacza to więc, że graniczną wartością będzie R takie, że prędkość światła i druga prędkość kosmiczna są sobie równe:

$$c = v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{BH}}{R}},$$

czyli przekształcając dostajemy:

$$c^2 = \frac{2GM_{BH}}{R}$$
$$R = \frac{2GM_{BH}}{c^2}.$$

Powyższa interpretacja jest błędna w ujęciu relatywistycznym, jednak ma większy sens w ramach teorii newtonowskiej. Co jednak ciekawe ścisły, relatywistyczny wzór na promień nierotującej czarnej dziury (tzw. promień Schwarzschilda) jest również dany poprzez

$$R = \frac{2GM_{BH}}{c^2}.$$

b) Emisja promieniowania termicznego z ciała doskonale czarnego o powierzchni S zachodzi zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna:

$$L = S \cdot \sigma \cdot T_H^4.$$

Pole powierzchni kuli to $4\pi R^2$, więc moc promieniowania jest dana przez:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_H^4 = 4\pi R^2 \sigma \left(\frac{1}{M_{BH}} \cdot 1{,}2 \times 10^{23}\,\mathrm{K \cdot kg} \right)^4 = 4\pi \left(\frac{2GM_{BH}}{c^2} \right)^2 \sigma \frac{1}{M_{BH}^4} \cdot \left(1{,}2 \times 10^{23}\,\mathrm{K \cdot kg}\right)^4$$

$$L = \frac{16\pi\sigma G^2}{c^4 M_{BH}^2} \cdot 2{,}074 \times 10^{92}\,\mathrm{K^4 \cdot kg^4} = \frac{1}{M_{BH}^2} \cdot 3{,}247 \times 10^{32}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg^2}}$$

c) Korzystając z $E = mc^2$ dostajemy:

$$R = \frac{2GM_{BH}}{c^2} \implies M_{BH} = \frac{c^2 R}{2G}$$

$$E = M_{BH} c^2 = \frac{c^4 R}{2G}$$

d) W tym zadaniu można było zastosować przybliżenie liniowe wyniku w którym moc promieniowania czarnej dziury nie zmienia się przez cały okres jej życia (przez co jej energia, a więc też masa, liniowo maleje). Otrzymujemy wówczas czas życia:

$$T = \frac{E}{L} = \frac{M_{BH} c^2}{\frac{3{,}247 \times 10^{32}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg^2}}}{M_{BH}^2}} = \frac{M_{BH}^3 c^2}{3{,}247 \times 10^{32}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg^2}}} = M_{BH}^3 c^2 \cdot 3{,}08 \times 10^{-32}\,\frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{W}}$$

$$T = \left(\frac{c^2 R}{2G} \right)^3 c^2 \cdot 3{,}08 \times 10^{-32}\,\frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{W}} = R^3 \frac{c^8}{8G^3} \cdot 3{,}08 \times 10^{-32}\,\frac{\mathrm{kg^2}}{\mathrm{W}} = R^3 \cdot 8{,}512 \times 10^{64}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m^3}}$$

Tymczasem czas życia wszechświata to $T = 13{,}7 \times 10^9\,\mathrm{lat} = 4{,}3 \times 10^{17}\,\mathrm{s}$. Zatem otrzymujemy

$$R^3 = T \cdot \left(8{,}512 \times 10^{64}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m^3}} \right)^{-1} = 5{,}05 \times 10^{-48}\,\mathrm{m^3}$$

$$R = 1{,}7 \times 10^{-16}\,\mathrm{m},$$

co jest równe mniej więcej 1/5 promienia protonu.

Zwróćmy jednak uwagę na to, że przybliżenie liniowe nie oddaje w pełni ewolucji czarnej dziury w czasie. Gwałtowne pojaśnienie pod koniec jej życia bierze się właśnie z olbrzymich ilości wypromieniowywanych energii, zgodnie z wzorem na moc promieniowania L z podpunktu b), która zmienia się odwrotnie do kwadratu masy czarnej dziury. Nie można więc zakładać w szczególności, że moc promieniowania czarnej dziury jest stała przez cały jej okres życia. Po dokładnych obliczeniach (których szczegóły tutaj pominiemy, gdyż wymagają wiedzy czytelnika na temat równań różniczkowych) można stwierdzić, że szukany promień takiej czarnej dziury będzie równy $3{,}83 \times 10^{-16}\,\mathrm{m}$ – jest to wynik zauważalnie inny, jednak jak widzimy nasze przybliżenie nie było złe, otrzymaliśmy dobry rząd wielkości wyniku. Warto tutaj zwrócić uwagę na olbrzymie gęstości, które panowały we wczesnych etapach wszechświata i które byłyby w stanie doprowadzić do powstania takich czarnych dziur.

Wielu uczestników finału poradziło sobie dobrze z pierwszymi trzema podpunktami zadania. Podpunkt d) stworzył większe problemy, ale kilka rozwiązań zawierało właściwe rozumowanie, choć nikomu nie udało się otrzymać właściwego wyniku liczbowego.

autorzy rozwiązania: Maksymilian Wdowiarz-Bilski, Krzysztof Król

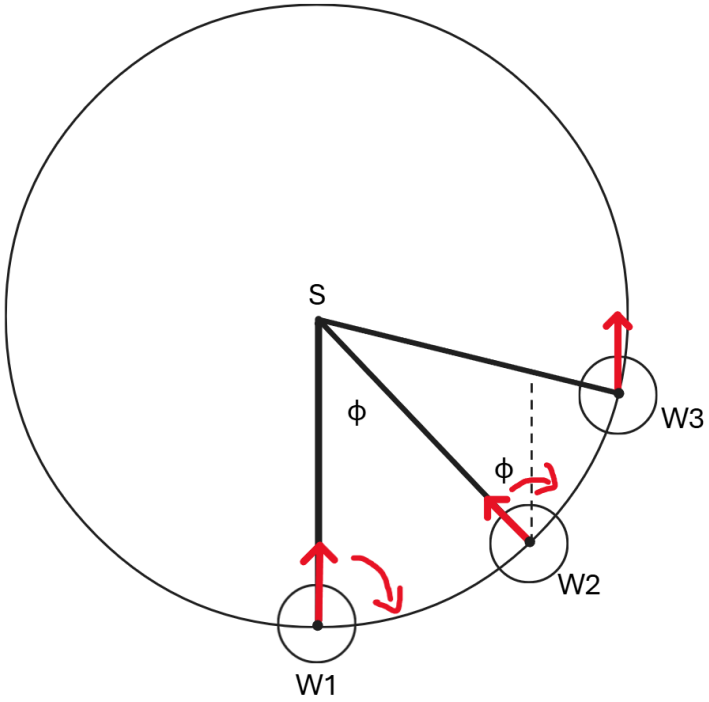
3. Wenus jest drugą planetą od Słońca, a jej okres obiegu wynosi $T = 224{,}7$ dni. Wenus obraca się również dookoła własnej osi z zaskakująco niską prędkością kątową: $\omega = -1{,}481°/\text{dzień}$, przy czym ujemna wartość tej prędkości oznacza, że Wenus obraca się przeciwnie do ruchu obiegowego wokół Słońca. Patrząc więc „z góry" na Układ Słoneczny ruch obiegowy Wenus odbywa się przeciwnie do wskazówek zegara, zaś ruch dookoła własnej osi jest zgodny ze wskazówkami zegara.

   a) Zdefiniujmy dobę słoneczną jako czas pomiędzy dwoma górowaniami Słońca. Ile wynosi doba słoneczna na Wenus?

   b) Wyraź rok wenusjański (okres obiegu Wenus dookoła Słońca) w dniach wenusjańskich (dobach słonecznych na Wenus). Czy to prawda, że dzień na Wenus jest dłuższy od roku?

autor: Olaf Krupiński

Rozwiązanie



Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadania, zastanówmy się nad obecną w nim sytuacją. Zadanie zwracało uczestnikom uwagę na różnicę pomiędzy dobą gwiazdową i dobą słoneczną. W przypadku Wenus różnica ta jest znacząca, co wpływa na tak elementarne zjawisko fizyczne jak długość dnia. Dobę słoneczną definiujemy jako czas upływający pomiędzy kolejnymi górowaniami Słońca; jest to więc dla ludzi nie mających dużej styczności z astronomią ta zwykła doba (na Ziemi równa 24 godziny). Z kolei doba gwiazdowa jest czasem pomiędzy kolejnymi wschodami bardzo odległych od planety gwiazd (na Ziemi wynosi ona ok. 23 godziny i 56 minut). Spójrzmy na rysunek - niech czerwona strzałka oznacza Wenusjanina, patrzącego w chwili W1 na Słońce (w południe). Wenusjanin z utęsknieniem czeka aż minie jeden dzień, a on znów zobaczy Słońce w południe. Stanie się to w chwili W2, gdy czerwona strzałka ponownie będzie zwrócona w stronę Słońca. Jednakże Wenusjanin mógł zauważyć, że pozycja innych gwiazd na niebie nie jest taka sama jak w chwili W1. Aby była taka sama, musiałby zaczekać aż do chwili W3, kiedy czerwona strzałka znów będzie skierowana „w górę".

Rozwiążmy to numerycznie. Oznaczmy kąt $\angle W1\ S\ W2 = \phi$, prędkość kątową ruchu obiegowego ω_1 i prędkość kątową ruchu obrotowego ω_2. Wówczas pomiędzy momentami W1, W2 Wenus przebywa kąt ϕ w ruchu obiegowym, a więc z definicji:

$$\omega_1 = \frac{\phi}{t_S}$$

gdzie t_S jest długością doby słonecznej. Zauważmy, że w tym samym czasie Wenus obróciła się wokół własnej osi o kąt $360° - \phi$, bowiem potrzebuje jeszcze ϕ aby dokręcić się do pełnego kąta (kąt naprzemianległy). Czyli ponownie z definicji prędkości kątowej:

$$\omega_2 = \frac{360° - \phi}{t_S}$$

Teraz wystarczy to rozwiązać i znaleźć dobę słoneczną t_S. Gdy dodamy prędkości kątowe, to pozbędziemy się ϕ, dostając:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{\phi}{t_S} + \frac{360° - \phi}{t_S} = \frac{\phi + 360° - \phi}{t_S} = \frac{360°}{t_S}$$

Standardowo, mnożymy przez t_S i dzielimy przez $\omega_1 + \omega_2$, i dostaniemy:

$$t_S = \frac{360°}{\omega_1 + \omega_2}$$

Widzimy od razu, że wynik jest identyczny, jak gdybyśmy po prostu dodali do siebie prędkości kątowe $\omega_S = \omega_1 + \omega_2$ i skorzystali z definicji $t_S = 360°/\omega_S$. Mimo że mniej formalny, jest to wciąż poprawny sposób rozumowania – można stwierdzić, że ruch obiegowy Wenus dookoła Słońca przeszkadza w obrocie dookoła własnej osi. A z liniowej natury obu prędkości możemy je po prostu do siebie dodać (paradoksalnie, dodanie ich do siebie wydłuży dobę słoneczną, a odjęcie skróci. Z tego względu gdyby Wenus obracała się w przeciwną stronę, jej doba słoneczna byłaby krótsza od gwiazdowej).

Jeśli jeszcze chwilę pobawimy się naszym wzorem końcowym, możemy dostać:

$$t_S = \frac{360°}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{360°}{\frac{360°}{t_1} + \frac{360°}{t_2}} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}$$

Co jest znanym przez niektórych wzorem na okres synodyczny (oczywiście z plusem zamiast minusa z uwagi na przeciwne kierunki prędkości kątowych).

Wracając jednak do rzeczy przyziemnych (a nawet przywenusjańskich) i oznaczeń z treści zadania:

$$t_S = \frac{360°}{\omega + \frac{360°}{T}}$$

Liczymy wartość liczbową:

$$t_S \approx 116{,}8 \text{ dni}$$

Albo w innych jednostkach ok. 1,92 dni wenusjańskich. Ostatecznie obala to mit o tym, że dzień na Wenus jest dłuższy od roku. Możemy jeszcze policzyć długość doby gwiazdowej na Wenus:

$$t_G = \frac{360°}{\omega} \approx 243{,}0 \text{ dni}$$

i widzimy skąd ten mit tak naprawdę się wziął - ta doba faktycznie jest dłuższa od roku na Wenus. Niestety ten sam błąd został popełniony przez dużą część uczestników finału, a zadanie to rozwiązało poprawnie (i na 5 punktów) 5 uczestników. Niemniej taka pomyłka pozwala (po późniejszym poznaniu poprawnego rozwiązania) dużo więcej nauczyć się z zadania i lepiej zapamiętać, o co w nim chodziło.

Zadanie to nawiązywało do 1-etapowego zadania, w którym uczestnicy mieli stwierdzić jak zmieni się doba na Ziemi, jeśli zacznie się ona obracać w przeciwną stronę. Było to (statystycznie) najtrudniejsze zadanie z tego etapu. Myślę, że uważny czytelnik będzie w stanie teraz rozwiązać to zadanie.

autor rozwiązania: Olaf Krupiński