

Drogi uczniu,

Gratulujemy awansu do finału II Olimpiady Astronomicznej Juniorów! Obie części zawodów (teoretyczna i praktyczna) będą trwały po **135 minut**. Na zawodach będziesz mieć zapewnione wszystkie niezbędne przyrządy i materiały potrzebne do rozwiązania zadań. Rozwiązanie każdego zadania umieść na osobnej kartce. Każdą stronę podpisz kodem uczestnika, numerem zadania, numerem strony w ramach rozwiązania i łączną liczbą stron rozwiązania. Rozwiązania powinny zawierać opis wszystkich kroków rozumowania, nie mogą zawierać luk logicznych oraz powinny być spisane w sposób czytelny i przejrzysty. Prace nieczytelne lub niepoprawnie podpisane mogą nie zostać sprawdzone. W razie problemów, wątpliwości, chęci wyjścia do toalety lub konieczności pobrania dodatkowych kartek należy zasygnalizować to podniesieniem ręki.

Powodzenia!
KOAJ i KGOAJ

Wybrane stałe astronomiczne i fizyczne:

$1 \text{ au} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$	jednostka astronomiczna
$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$	parsek
$M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$	masa Ziemi
$R_{\oplus} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$	średni promień Ziemi
$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$	masa Słońca
$G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$	stała grawitacji

Dodatkowe informacje

Prędkość kątową ω definiujemy jako

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{T}$$

gdzie $\Delta\alpha$ to kąt przebyty przez ciało w czasie Δt , a T to okres orbity tego ciała.

II prawo Keplera mówi, że prędkość polowa ciała na orbicie eliptycznej jest stała. Prędkość polowa to miara tego, jak szybko wektor łączący ognisko z ciałem na orbicie zakreśla pole. Równoważnie można to interpretować tak, że stosunek czasów przebycia dwóch różnych fragmentów orbity eliptycznej $\Delta t_1, \Delta t_2$ przez ciało to stosunek pól zakreślonych przez wektor łączący ognisko z ciałem orbitującym w tym czasie S_1, S_2 :

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Apocentrum orbity eliptycznej znajduje się w odległości $(1+e)a$ od jej ogniska, a perycentrum w odległości $(1-e)a$ od ogniska, e to jej mimośród (ekscentryczność), z definicji równy

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

gdzie a to wielka półoś tej orbity, a b to półoś mała. Pole elipsy S dane jest wzorem:

$$S = \pi ab.$$

Zadanie 1

Mówiąc o lotach na Księżyc, często rozważa się możliwość założenia na jego powierzchni bazy kosmicznej, z której startowałyby rakiety.

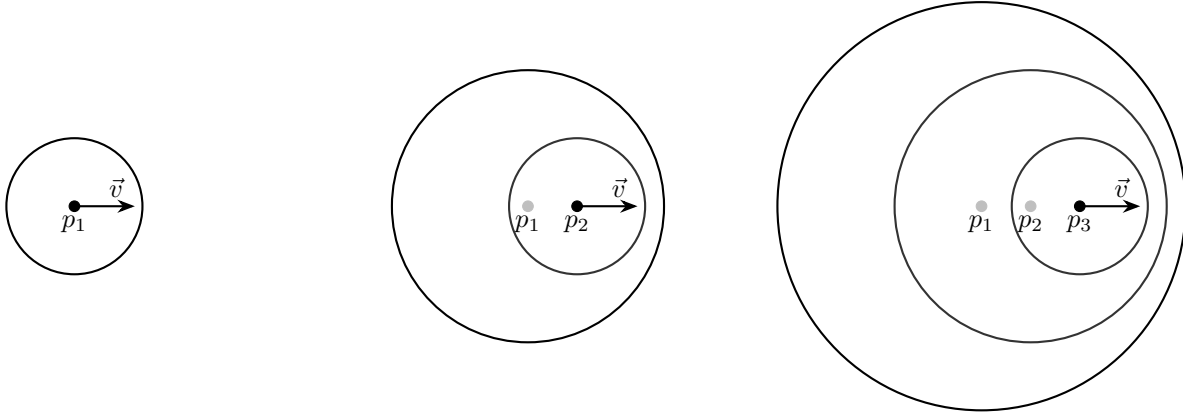
- a) Zakładając promień Księżyca $R_K = 1740$ km oraz masę $M_K = 7,35 \times 10^{22}$ kg, oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Księżyca g_K . Jaki jest stosunek g_K do przyspieszenia ziemskiego?
- b) Wiedząc, że Księżyc jest związany pływowo z Ziemią, oblicz okres obrotu Księżyca wokół własnej osi T . Jaką prędkość v_0 , wynikającą z tego ruchu, ma ciało na równiku Księżyca? Przyjmij, że Księżyc obiega Ziemię po okręgu o promieniu $d = 3,84 \times 10^5$ km. Porównaj wynik z prędkością ciała na równiku ziemskim.

Rozważmy start rakiety z powierzchni Ziemi i z powierzchni Księżyca. Pomińmy zmianę masy rakiety i zmianę przyspieszenia grawitacyjnego podczas lotu oraz wpływ ewentualnej atmosfery. Przyjmijmy stałą masę rakiety m oraz siłę ciągu silnika $F > \sqrt{2}mg_K$. Załóżmy także, że rakietę, w trakcie swojego lotu, jest stale skierowana w jednym kierunku.

- c) Niech rakietę startuje pionowo z bieguna Księżyca. Jaką prędkość v będzie miała rakietę po czasie t od startu?
- d) Ile będzie wynosiła prędkość rakiety v dla odchylenia rakiety od pionu wynoszącego 45° po czasie t od startu?
- e) Rozważmy teraz raketę startującą z równika Księżyca. Jaką prędkość v po czasie t od startu będzie miała rakietę dla startu z nachyleniem do pionu 45° , przy optymalnie wybranym azymucie lotu? Jakiemu kierunkowi geograficznemu odpowiada ten azymut (azymut mierzymy od geograficznego kierunku południa na zachód)?

Zadanie 2

Zjawisko Dopplera dla dźwięku polega na zmianie częstotliwości odbieranego dźwięku za sprawą względnego ruchu źródła dźwięku i obserwatora. Dźwięk to fale akustyczne rozchodzące się kołowo od źródła, jak na rysunku poniżej.



Obserwator definiujący długość fali jako odległość między kolejnymi grzbietami (lub dolinami) fali odbieranej słyszy dźwięk o innej długości fali (a więc też częstotliwości) niż dźwięk emitowany przez źródło. Efekt ten można obserwować na przykład stojąc na chodniku i analizując dźwięk słyszany od przejeżdżającej karetki z włączoną syreną alarmową.

- Rozważ pojazd emitujący dźwięk o długości fali λ_p i oddalający się z prędkością v od obserwatora stojącego w spoczynku. Pojazd porusza się wzdłuż prostej łączącej pojazd z obserwatorem. Wyznacz długość fali dźwiękowej λ'_p odbieranej przez obserwatora. Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa c_{air} .
- Oblicz częstotliwość odpowiadającą falom o długościach λ_0 i λ z poprzedniego podpunktu.

Za sprawą korpuskularno-falowej natury światła możemy analizować światło zarówno jako cząstkę, jak i jako falę. Uznanie światła za falę elektromagnetyczną poruszającą się z prędkością c pozwala stwierdzić, że efekt Dopplera występuje również dla fal elektromagnetycznych.

Teraz rozważymy galaktykę znajdującą się w bardzo dużej odległości od obserwatora na Ziemi, której prędkość prostopadła do prostej łączącej galaktykę i Ziemię jest zerowa.

- Galaktyka oddala się od obserwatora z prędkością u . Gwiazda w tej galaktyce emituje linię emisyjną o długości fali λ_0 . Analogicznie do podpunktu a) oblicz, na jakiej długości fali λ' tę linię emisyjną obserwuje wspomniany obserwator.
- Prawo Hubble'a mówi, że za sprawą rozszerzania się wszechświata, odległe galaktyki oddalają się od obserwatora z prędkością

$$u = H_0 d,$$

gdzie H_0 to stała Hubble'a, a d to odległość między ciałami. Przyjmij, że stała Hubble'a jest znana.

Oblicz jak zależy stosunek λ'/λ_0 od odległości galaktyki od Ziemi.

- Konsekwencją tego, że prędkość światła w próżni jest skończona i w każdym inercjalnym układzie równa c jest występowanie dylatacji czasu. Oznacza to różne tempo upływu czasu dla inercjalnych obserwatorów poruszających się z różnymi prędkościami.

W przypadku opisanym w poprzednim podpunkcie w czasie, gdy dla obserwatora na Ziemi upływa czas $t_\oplus$, w galaktyce upływa czas

$$t_G = t_\oplus \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = t_\oplus \sqrt{\left(1 - \frac{u}{c}\right) \left(1 + \frac{u}{c}\right)}.$$

Zmodyfikuj otrzymany w podpunkcie d) wzór na λ'/λ_0 uwzględniając dylatację czasu.

Zadanie 3

Astronomowie dostrzegli nową kometę okrążającą Słońce, po orbicie o wielkiej półosi $a = 3,12$ au i ekscentryczności (mimośrodku) bardzo zbliżonej do jedności, choć od niej mniejszej. Kometą w dniu odkrycia znajdowała się w odległości a od Słońca i zmniejszała swoją odległość od niego, a dodatkowo kometą, Ziemia i Słońce znajdowały się na jednej prostej. W zadaniu rozważamy jedynie wpływ grawitacji Słońca na ruch komety i zakładamy, że jej orbita jest stabilna.

- a) Oblicz okres obiegu komety wokół Słońca.
- b) Chwilowo przybliżając orbitę komety do okręgu o promieniu równym podanej w treści wielkiej półosi a , oblicz prędkość kątową komety.
- c) Dalej stosując przybliżenie z poprzedniego podpunktu, oszacuj, po jakim czasie Ziemia znów znajdzie się dokładnie pomiędzy kometą a Słońcem. Oceń poprawność tego przybliżenia, podając uzasadnienie swojej oceny.
- d) Ściśle oblicz, po jakim czasie od obserwacji komety, Ziemia i Słońce znów znajdą się na jednej prostej (niekoniecznie w tej kolejności). Załóż, że kometą przetrwa maksymalne zbliżenie do Słońca bez wpływu na jej orbitę.